

BACHELORARBEIT

ZUR ERLANGUNG DES GRADES EINES
„BACHELOR OF SCIENCE“
IM FACH PHYSIK

AN DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE
DER RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

ÜBER DAS THEMA

ENTWICKLUNG UND VALIDIERUNG
EINES DREIDIMENSIONALEN, PARALLELEN HYBRID CODES
ZUR SIMULATION VON PLASMEN

VON
MARC FEHLING

AUS
LÜBBECKE

BOCHUM, SOMMERSEMESTER 2013

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis	II
Abbildungsverzeichnis	II
1 Einleitung	1
2 Physikalische Grundlagen	2
2.1 Grundlagen der Plasmaphysik	2
2.1.1 Bewegungsgleichung geladener Teilchen	2
2.1.2 Makroskopische Beschreibung von Plasmen	3
2.1.3 Impulsbilanzgleichung	3
2.1.4 Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik	4
2.2 Hybrid-Modell zur Plasmabeschreibung	5
2.3 Wellen in unbeschränkten Plasmen	6
2.3.1 Teilchenoszillationen im Plasma	7
2.3.2 EM-Wellen ($B_0 = 0$)	8
2.3.3 Wellen in magnetisierten Plasmen mit ruhenden Ionen	9
2.3.4 Wellen in magnetisierten Plasmen mit zirkular-oszillierenden Ionen	11
2.3.5 Ionenakustische Wellen	12
2.4 Normierung	14
3 Numerische Implementation	16
3.1 Yee-Gitter und Parallelisierung	16
3.2 Makroteilchen	17
3.3 Zeitauflösung	18
3.4 Numerische Lösungen der Hybrid-Gleichungen	19
3.4.1 Versuch 1: Extrapolation des E-Feldes	19
3.4.2 Versuch 2: E-Feld Predictor	20
4 Validierung	23
4.1 Wellen in magnetisierten Plasmen	25
4.2 Ionenakustische Wellen	28
4.3 Energieerhaltung	32
4.4 Parallelisierung	35
5 Kommentar und Ausblick	37
Literaturverzeichnis	III

Tabellenverzeichnis

4.1	Testergebnisse mit Wellen in magnetisierten Plasmen	26
4.2	Testergebnisse mit ionenakustischen Wellen	30

Abbildungsverzeichnis

3.1	Gitter nach Yee ^[11]	17
3.2	Schemata der numerischen Lösungsverfahren	22
4.1	Graph zu Tests mit Wellen in magnetisierten Plasmen	27
4.2	Graph zu Tests mit ionenakustischen Wellen	31
4.3	Verlauf einer ionenakustischen Welle	33
4.4	Graph zum Test der Energieerhaltung	34
4.5	Vergleich der Bilder einer ionenakustischen Welle mit verschiedenen Anzahlen an Blöcken	36

1 Einleitung

Zur weiterführenden Deutung der Ergebnisse des „FlareLab“-Experiments¹ entsteht der „Placebo“-Code am TP1 Institut für computerorientierte Plasmaphysik der Ruhr-Universität Bochum, der bis zur Erstellung dieser Arbeit einen „Particle-in-Cell“ (PIC) und einen magnetohydrodynamischen (MHD) Code zur Simulation von Plasmen enthält. Der PIC-Teil soll dabei das Plasma in jenem Stadium zu Anfang des Experiments beschreiben, in dem die Dichten der Ionen und Elektronen so klein sind, dass kinetische Effekte erwartet werden, weshalb diese jeweils als Teilchen aufgefasst werden. Den fortgeschrittenen Verlauf des Experiments soll der MHD-Teil illustrieren, in welchem die Dichten beider Teilchenspezies so groß sind, dass beide als ein Fluid gehandhabt werden. Der in dieser Arbeit vorgestellte „Hybrid“-Code soll beide Teile insofern verknüpfen, als das Plasma in dem Zustand zwischen den beiden geschilderten Fällen beschrieben werden soll - nämlich wenn sich die Elektronen bereits wie ein Fluid verhalten, die Ionen jedoch aufgrund großer Larmor-Radien noch kinetische Effekte aufweisen und daher als Teilchen behandelt werden.

Numerische Lösungsverfahren für Hybrid-Codes wurden in bereits veröffentlichten Papern vorgestellt. Grundlage für die Realisierung des Codes dieser Arbeit ist der „current advance method and cyclic leapfrog“-Algorithmus (CAM-CL) von Matthews^[8], dessen „predictor-corrector“-Verfahren für das elektrische Feld von Harned^[7] stammt. Sotnikov et al.^[6] nutzten einen hierauf basierenden Code zur Untersuchung eines Plasmas in einer Pinch-Anordnung nach Bennet.

In dieser Arbeit sollen zunächst fundamentale Eigenschaften von Plasmen, im Besonderen jene des Hybrid-Modells, sowie verschiedene Dispersionsrelationen für Wellen in solchen Hybrid-Plasmen zum Zweck der Validierung des Codes hergeleitet werden. Auf dieser Grundlage sollen zwei mögliche Realisationen von numerischen Implementierungen vorgestellt werden, von denen eine bevorzugte in abschließenden Tests überprüft wird, in denen konstruierte Plasmakonstellationen entsprechend den oben bereits genannten Dispersionsrelationen auf ihren korrekten zeitlichen Verlauf untersucht werden. Mögliche Anwendungen des Hybrid-Codes werden zum Schluss in einem kurzen Ausblick vorgestellt.

¹<http://flarelab.ruhr-uni-bochum.de>

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Grundlagen der Plasmaphysik

In diesem Kapitel sollen die notwendigen Grundlagen vermittelt werden. Hierbei werden die benötigten Gleichungen und Zusammenhänge im SI-Einheitensystem hergeleitet, welche allerdings gegen Ende des Kapitels neu normiert werden.

2.1.1 Bewegungsgleichung geladener Teilchen

In einem elektrischen Feld der Stärke \mathbf{E} und einem magnetischen Feld mit der Flussdichte \mathbf{B} werden Teilchen der Ladung q und Masse m durch die Lorentzkraft^{[3],S.13} abgelenkt.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.1)$$

Ein reines, homogenes Magnetfeld beschleunigt geladene Teilchen auf eine kreisförmige Bahn^{[3],S.14}. Zur Untersuchung dieses Zusammenhangs wird die Bewegungsgleichung geladener Teilchen in einem konstanten Magnetfeld der Flussdichte \mathbf{B} betrachtet.

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{B} = \left(\frac{q}{m}\right)^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \left[\mathbf{v} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{B^2} \right]$$

Mit Vektorprojektionen kann die Differentialgleichung in eine parallele und senkrechte Komponente relativ zur Magnetfeldrichtung separiert werden, sodass letztendlich für den Anteil entlang des Magnetfeldes eine gleichförmige und für den senkrechten Anteil eine oszillierende Bewegung mit der Zyklotronfrequenz Ω resultiert, die die periodische Spiral- bzw. Kreisbewegung im Magnetfeld beschreibt.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel} &= \frac{\mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{B^2}, & \mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{B^2}, & \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \\ \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{v}}_{\parallel} &= 0, & \ddot{\mathbf{v}}_{\perp} &= -\Omega^2 \mathbf{v}_{\perp}, & \Omega &= \frac{qB}{m} \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1.2 Makroskopische Beschreibung von Plasmen

Die Verteilung der Teilchen in einem Plasma, welche im Folgenden einzeln mit dem Index α gekennzeichnet werden, kann ganz allgemein über die Verteilungsfunktion $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ einer jeden Spezies s erfolgen, aus deren Momenten Teilchenzahldichte $n_s(\mathbf{x}, t)$, Ladungsdichte $\rho_s(\mathbf{x}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}_s(\mathbf{x}, t)$ abgeleitet werden können, die die Kontinuitätsgleichung^{[4],S.66} erfüllen. Die dabei auftretende Fluidgeschwindigkeit $\mathbf{u}_s = \bar{\mathbf{v}}_s$ beschreibt die Gesamtbewegung jeder Teilchenspezies, wohingegen die Einzelteilchengeschwindigkeit $\mathbf{v}_{s,\alpha}$ auf die einzelnen Teilchen beschränkt bleibt.

$$\text{Nulltes Moment: } n_s = \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \Rightarrow \rho_s = q_s n_s \quad (2.3)$$

$$\text{Erstes Moment: } n_s \mathbf{u}_s = \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \Rightarrow \mathbf{j}_s = q_s n_s \mathbf{u}_s = \rho_s \mathbf{u}_s \quad (2.4)$$

$$\text{Kontinuitätsglg.: } \frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = 0 \quad (2.5)$$

Hinweis: In dieser Arbeit ist mit ρ stets die Ladungs- und nicht die Massendichte gemeint.

In diesem Zusammenhang soll auch die Quasi-Neutralität als jene Eigenschaft eines Plasmas eingeführt werden, die die Ladungsneutralität durch die Ladungsdichten unter folgender Bedingung ausdrückt.

$$\left| \sum_s \rho_s \right| \ll \sum_s |\rho_s| \Rightarrow \sum_s \rho_s \approx 0 \quad (2.6)$$

2.1.3 Impulsbilanzgleichung

Zur makroskopischen Beschreibung der Teilchen wird die Impulsbilanzgleichung^{[4],S.65} herangezogen, die aus der Vlasov-Gleichung und der Lorentzkraft hergeleitet werden kann. Diese berücksichtigt zusätzlich zur Bewegungsgleichung der Einzelteilchen auch die Auswirkungen von Druckgefällen und Kollisionen der Teilchen untereinander, wobei τ_{st} die charakteristische Stoßzeit zwischen der Teilchenspezies s und den anderen Spezies t beschreibt.

$$m_s n_s \frac{D\mathbf{u}_s}{Dt} = q_s n_s [\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \mathbf{P}_s - m_s n_s \sum_t \frac{\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t}{\tau_{st}} \quad (2.7)$$

Die dabei auftretende konvektive Ableitung beschreibt die Änderung einer Größe im mitbewegten System.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \quad (2.8)$$

Im vereinfachten Fall^{[4],S.64}, in dem die Verteilungsfunktion der betrachteten Teilchenspezies einer isotropen Maxwell-Verteilung entspricht, hat der Drucktensor \mathbf{P}_s die Form einer Diagonalmatrix, deren Eigenwerte genau dem skalaren Druck p_s entsprechen, der aus der idealen Gasgleichung^{[4],S.63} abgeleitet werden kann. In der Impulsbilanzgleichung reduziert sich dann der Term $\nabla \cdot \mathbf{P}_s$ auf ∇p_s .

$$p_s = n_s k_B T_s \quad (2.9)$$

2.1.4 Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik

Die Zusammenhänge zwischen elektrischen und magnetischen Feldern werden durch die Maxwell-Gleichungen^{[3],S.13} der Elektrodynamik vollständig beschrieben.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.13)$$

2.2 Hybrid-Modell zur Plasmabeschreibung

Das Hybrid Modell beschreibt ein quasineutrales Plasma, in welchem die Ionen kinetisch separat als Teilchen und die Elektronen als Fluid betrachtet werden, bei dem die Impulsänderung als verschwindend klein angenommen wird. Aus letzterem Zusammenhang leitet sich das elektrische Feld \mathbf{E} ab.

$$\text{Bewegungsglg. (2.1): } \frac{d\mathbf{v}_{i,\alpha}}{dt} = \frac{q_i}{m_i} [\mathbf{E} + \mathbf{v}_{i,\alpha} \times \mathbf{B}] \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsbilanzglg. (2.7): } 0 &= q_e n_e [\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] - \nabla p_e - m_e n_e \frac{\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i}{\tau_{ei}} \\ \Leftrightarrow \mathbf{E} &= -\mathbf{u}_e \times \mathbf{B} + \frac{\nabla p_e}{\rho_e} + \frac{m_e}{q_e} \frac{\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i}{\tau_{ei}} \end{aligned}$$

Hierbei bietet es sich an, die Größen der Elektronen durch die der Ionen auszudrücken, sodass die Elektronen als Hintergrund eben solcher angenommen werden können und ein einheitlicher Satz von Ionengrößen und Feldern entsteht. Dieser Übergang geschieht mithilfe der Quasineutralität (2.6) und des Ampèreschen Gesetzes (2.10), dessen Korrekturterm vernachlässigt werden kann; denn dadurch, dass die Bewegung der Elektronen durch die Quasineutralität beschränkt bleibt, verschwindet die longitudinale Komponente des Verschiebungsstroms und die transversale Komponente wird nach der Darwin-Näherung^[7] vernachlässigt.

$$\begin{aligned} \text{Maxwell-Glg. (2.10): } \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 (\mathbf{j}_i + \mathbf{j}_e) = \mu_0 (\rho_i \mathbf{u}_i + \rho_e \mathbf{u}_e) \\ \Rightarrow \mathbf{u}_e &= \frac{1}{\rho_e} \left[\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} - \rho_i \mathbf{u}_i \right] = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0 \rho_e} - \frac{\rho_i}{\rho_e} \mathbf{u}_i \\ \text{Quasineutralität (2.6): } 0 &\approx \rho_i + \rho_e \Rightarrow \rho_e \approx -\rho_i \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{1}{\rho_i} \left[\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{j}_i \right] \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{\rho_i} - \underbrace{\frac{m_e}{q_e \tau_{ei} \rho_i}}_{:= \eta} \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (2.15) \end{aligned}$$

Nach dem Poynting-Theorem gibt der Term mit der Resistivität η einen Verlust der magnetischen Energiedichte in Abhängigkeit von der Zeit an.

2.3 Wellen in unbeschränkten Plasmen

Zur Untersuchung von Schwingungen und Wellen im Plasma ist eine Linearisierung^{[4],S.84} der betroffenen Größen hilfreich, bei der jene in einen Gleichgewichtsteil (Index 0) und einen oszillierenden Störungsteil separiert werden, der in erster Ordnung z.B. als ebene Welle mit entsprechender Amplitude (Index 1) angesetzt werden kann.

$$a \rightarrow a_0 + a_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial a_{0,1}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha \in \{x,y,z,t\}} = 0$$

Für gewöhnlich wird von kleinen Störungen ausgegangen, sodass Produkte von Störungstermen verschiedener Größen vernachlässigt werden können, was einer Linearisierung erster Ordnung entspricht.

Im weiteren Verlauf werden wichtige Größen und Beziehungen für Schwingungen und Wellen in unbeschränkten Plasmen für verschiedene Gegebenheiten hergeleitet. Dabei wird zur Beschreibung der Bewegungen der Teilchen die Impulsbilanzgleichung statt der Bewegungsgleichung der Einzelteilchen verwendet, um ihren makroskopischen Wellencharakter zu untersuchen. Dabei auftretende kinetische Effekte wie die Landau-Dämpfung werden dabei vernachlässigt, spielen aber sowohl in der Realität als auch in den Simulationen eine prägende Rolle. In diesen Herleitungen wird zunächst von beliebigen und später im Speziellen von Plasmen entsprechend des Hybrid-Modells ausgegangen, wobei für letztere die grundlegende Eigenschaft der Quasi-Neutralität (2.6) in diesem Zusammenhang für den gestörten sowie den Gleichgewichtszustand separat erfüllt sein muss.

$$\rho_0 = \sum_s q_s n_{s,0} \approx 0, \quad \rho_1 = \sum_s q_s n_{s,1} \approx 0 \quad (2.16)$$

2.3.1 Teilchenoszillationen im Plasma

Für diesen Fall^{[4],S.82ff} wird ein sich vollständig im Gleichgewicht befindliches, kaltes und kollisionsfreies Plasma betrachtet, aus dem eine Teilchenspezies s gegenüber anderen, ruhenden Spezies r entlang einer beliebigen Richtung ausgelenkt wird, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die x -Richtung gesetzt wird, sodass auch der Wellenzahlvektor $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ dieser Störung in dieselbe zeigt. Somit wird auch ein elektrisches Feld \mathbf{E} entlang dieser Richtung aufgebaut, das nach der Maxwell-Gleichung (2.11) kein magnetisches Feld der Flussdichte \mathbf{B} nach sich zieht.

$$\begin{aligned} n_r &= n_{r,0}, & \mathbf{u}_r &= 0, \\ n_s &= n_{s,0} + n_{s,1} e^{i(kx-\omega t)}, & \mathbf{u}_s &= u_{s,1} \hat{\mathbf{x}} e^{i(kx-\omega t)}, \\ \mathbf{E} &= E_1 \hat{\mathbf{x}} e^{i(kx-\omega t)}, & \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Nach Linearisierung bis zur ersten Ordnung ergibt sich folgendes Gleichungssystem, für das es genügt die x -Komponenten der einzelnen Gleichungen auszuwerten.

$$\text{Kontinuitätsglg. (2.5): } -i\omega n_{s,1} = -n_{s,0} (iku_{s,1}) \Leftrightarrow n_{s,1} = \frac{kn_{s,0}}{\omega} u_{s,1}$$

$$\text{Quasineutralität (2.16): } \rho = \rho_0 + \rho_1 \stackrel{\rho_0 \approx 0}{=} q_s n_{s,1}$$

$$\text{Maxwell-Glg. (2.13): } ikE_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{q_s n_{s,1}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E_1 = -i \frac{q_s}{\epsilon_0 k} n_{s,1}$$

$$\text{Impulsbilanzgleichung (2.7): } m_s n_{s,0} (-i\omega u_{s,1}) = q_s n_{s,0} E_1 = -i \frac{q_s^2 n_{s,0}^2}{\epsilon_0 \omega} u_{s,1}$$

Für $u_{s,1} \neq 0$ folgt die entsprechende Dispersionrelation, die als Plasmafrequenz definiert wird.

$$\omega^2 = \frac{q_s^2 n_{s,0}}{\epsilon_0 m_s} := \omega_{p,s}^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_{p,s} = \sqrt{\frac{q_s^2 n_{s,0}}{\epsilon_0 m_s}} \quad (2.17)$$

2.3.2 EM-Wellen ($B_0 = 0$)

An dieser Stelle^{[4],S.114ff} werden transversale elektromagnetische Wellen untersucht, die sich im kalten, kollisionsfreien Plasma in beliebiger Richtung ausbreiten. Wie im vorigen Kapitel wird wieder der Fall betrachtet, in dem eine Teilchenspezies gegenüber den anderen gestört ist.

$$\begin{aligned} n_r &= n_{r,0}, & \mathbf{u}_r &= 0, \\ n_s &= n_{s,0} + n_{s,1} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, & \mathbf{u}_s &= \mathbf{u}_{s,1} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \end{aligned}$$

Nach Umformung der folgenden Maxwell-Gleichungen lassen sie sich ineinander überführen, wonach eine Linearisierung bis zur ersten Ordnung angebracht ist.

$$\begin{aligned} \nabla \times (2.11): \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (2.10): \quad \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \Rightarrow - \left(\underbrace{-\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + \mathbf{k}^2 \mathbf{E}_1}_{=0, \mathbf{k} \perp \mathbf{E}_1} \right) &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{E}_1 \xrightarrow{c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} (\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} \end{aligned}$$

Durch Linearisierung der folgenden Gleichungen bis zur ersten Ordnung lassen sich die unbekanntenen Störterme aus obiger Gleichung eliminieren.

$$\text{Impulsbilanzgl. (2.7): } n_{s,0} (-i\omega \mathbf{u}_{s,1}) = q_s \mathbf{E}_1 \Rightarrow \mathbf{u}_{s,1} = i \frac{q_s}{m_s \omega} \mathbf{E}_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ Stromdichte (2.4): } \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} = q_s n_{s,0} (-i\omega \mathbf{u}_{s,1}) = \frac{q_s^2 n_{s,0}}{m_s} \mathbf{E}_1$$

$$\Rightarrow (\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = \frac{q_s^2 n_{s,0}}{\epsilon_0 m_s} \mathbf{E}_1 \xrightarrow{(2.17)} \omega_{p,s}^2 \mathbf{E}_1$$

Die gesuchte Dispersionrelation ergibt sich für $\mathbf{E}_1 \neq 0$.

$$\omega^2 = \omega_{p,s}^2 + c^2 k^2$$

Zur Verdeutlichung des Eindringverhaltens elektromagnetischer Wellen in ein Plasma wird der ortsabhängige Teil einer eben solchen betrachtet, die senkrecht in das Plasma einfällt. Diese Welle durchläuft es für $\omega > \omega_{p,s}$ problemlos, kann aber für den anderen Fall nicht tief eindringen, da die Wellenzahl k sonst komplexwertig wird und die Wellenamplitude so nach Eindringen einen exponentiellen Abfall aufweist.

$$ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_{p,s}^2} = i\sqrt{\omega_{p,s}^2 - \omega^2}$$

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{-|k|r} = e^{-\frac{r}{\delta}} \text{ mit } \delta = \frac{1}{|k|} = \frac{c}{\sqrt{\omega_{p,s}^2 - \omega^2}} = \frac{c}{\omega_{p,s}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{p,s}}\right)^2}}$$

Für $\omega_{p,s} \gg \omega$ wird so die Eindringtiefe definiert.

$$d_s = \frac{c}{\omega_{p,s}} = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 q_s^2 n_{s,0}}} \quad (2.18)$$

2.3.3 Wellen in magnetisierten Plasmen mit ruhenden Ionen

Bezugnehmend auf spätere Simulationstests soll nun ein kollisionsfreies Plasma im Hybrid-Modell studiert werden, welches aus zwei Teilchenspezies bestehen soll, nämlich aus positiv geladenen Ionen und einem Elektronenfluid. Dieses wird mit einem von außen angelegten Magnetfeld durchsetzt, dessen Ausrichtung in positiver z-Richtung ($B_0 > 0$) gewählt wird. Untersucht werden sollen links- und rechtszirkular polarisierte Wellen (L- und R-Moden), die entlang dieses Magnetfeldes propagieren und damit die nachfolgende Form^{[3],S.198ff} haben. Die R-Moden werden im weiteren Verlauf mit dem oberen, anfänglich positiven, die L-Moden mit dem unteren, anfänglich negativen Vorzeichen entsprechend ihrer Rotationsrichtung im und gegen den Uhrzeigersinn gekennzeichnet.

Die Elektronen folgen diesen Wellen durch zirkulare Oszillationen in der x-y-Ebene. In diesem Abschnitt werden die Ionen zunächst als ruhend angenommen, im folgenden jedoch auch wie die Elektronen als oszillierend betrachtet.

$$\begin{aligned} n_i &= n_{i,0}, & \mathbf{u}_i &= 0, \\ n_e &= n_{e,0} + n_{e,1} e^{i(kz - \omega t)}, & \mathbf{u}_e &= \mathbf{u}_{e,1} e^{i(kz - \omega t)}, \\ \mathbf{E} &= [E_1 \hat{\mathbf{x}} \pm i E_1 \hat{\mathbf{y}}] e^{i(kz - \omega t)}, & \mathbf{B} &= B_0 \hat{\mathbf{z}} + [B_1 \hat{\mathbf{x}} \pm i B_1 \hat{\mathbf{y}}] e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

Die Auswirkungen thermischer Bewegungen ist für beide Teilchenspezies s in solchen Plasmakonstellation unbedeutend, wie sich aus der Kontinuitätsgleichung (2.5) zeigen lässt.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}_s = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho_s = 0 \Rightarrow \rho_s = \text{const} \\ \Rightarrow p_s = T_s k_B n_s = T_s k_B \frac{\rho_s}{q_s} = \text{const} &\Rightarrow \nabla p_s = 0 \end{aligned}$$

Nach Linearisierung folgender Gleichungen bis zur ersten Ordnung kann aus dem so entstandenen Gleichungssystem die Dispersionsrelation hergeleitet werden.

$$\text{Maxwell-Glg. (2.11): } -(-i\omega B_1) = i\omega B_1 = \mp i(ikE_1) \Rightarrow B_1 = \mp i \frac{k}{\omega} E_1$$

$$\text{Maxwell-Glg. (2.10): } \mp i(ikB_1) = \mu_0 j_x = \mu_0 j_{e,1} \Rightarrow j_{e,1} = \pm \frac{kB_1}{\mu_0} = -i \frac{k^2}{\mu_0 \omega} E_1$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsbilanzglg. (2.7): } 0 &= q_e n_{e,0} [E_1 \pm i u_{e,1} B_0] = \rho_{e,0} E_1 \pm i j_{e,1} B_0 \\ \Rightarrow E_1 &= \frac{\mp i j_{e,1} B_0}{\rho_{e,0}} = \mp \frac{B_0}{\rho_{e,0}} \frac{k^2}{\mu_0 \omega} E_1 \end{aligned}$$

Über die Lösung der letzten Gleichung ergibt sich für $E_1 \neq 0$ die Dispersionsrelation mit der Whistler-Geschwindigkeit v_W , dessen ergänzter Index für die jeweilige Teilchenspezies steht.

$$\omega = \mp \frac{B_0}{\mu_0 \rho_{e,0}} k^2 := \mp v_{W,e} k^2 \stackrel{(2.16)}{=} \pm \frac{B_0}{\mu_0 \rho_{i,0}} k^2 := \pm v_{W,i} k^2 \quad (2.19)$$

2.3.4 Wellen in magnetisierten Plasmen mit zirkular-oszillierenden Ionen

Anschließend an voriges Kapitel wird nun der Fall mit zirkular oszillierenden Ionen und Elektronen betrachtet. Die Eigenschaften des Plasmas bleiben dabei dieselben.

$$\begin{aligned} n_e &= n_{e,0} + n_{e,1} e^{i(kz-\omega t)}, & \mathbf{u}_e &= [u_{e,1} \hat{\mathbf{x}} \pm i u_{e,1} \hat{\mathbf{y}}] e^{i(kz-\omega t)}, \\ n_i &= n_{i,0} + n_{i,1} e^{i(kz-\omega t)}, & \mathbf{u}_i &= [u_{i,1} \hat{\mathbf{x}} \pm i u_{i,1} \hat{\mathbf{y}}] e^{i(kz-\omega t)}, \\ \mathbf{E} &= [E_1 \hat{\mathbf{x}} \pm i E_1 \hat{\mathbf{y}}] e^{i(kz-\omega t)}, & \mathbf{B} &= B_0 \hat{\mathbf{z}} + [B_1 \hat{\mathbf{x}} \pm i B_1 \hat{\mathbf{y}}] e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned}$$

Für die folgende Herleitung genügt es, die x-Komponente der auftretenden Gleichungen zu betrachten.

$$\text{Maxwell-Glg. (2.11): } -(-i\omega B_1) = \mp i(ikE_1) \Rightarrow B_1 = \mp i \frac{k}{\omega} E_1 \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsbilanzglg. (2.7): } m_i n_{i,0} (-i\omega u_{i,1}) &= q_i n_{i,0} [E_1 \pm i u_{i,1} B_0] \\ \Rightarrow j_{i,1} = \rho_{i,0} u_{i,1} &= \frac{i \frac{q_i}{m_i} \rho_{i,0} E_1}{\omega \pm \frac{q_i}{m_i} B_0} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \text{Hybrid E-Feld-Glg. (2.15): } E_1 &= \frac{iB_0}{\rho_{i,0}} \left[\frac{kB_1}{\mu_0} \mp j_{i,1} \right] \\ &= \frac{iB_0}{\rho_{i,0}} \left[\frac{k}{\mu_0} \left(\mp i \frac{k}{\omega} E_1 \right) \mp \left(\frac{i \frac{q_i}{m_i} \rho_{i,0} E_1}{\omega \pm \frac{q_i}{m_i} B_0} \right) \right] \end{aligned}$$

Für $E_1 \neq 0$ ergibt sich eine quadratische Gleichung, die gelöst die Dispersionsrelation liefert.

$$\begin{aligned} 1 &= \pm \frac{B_0}{\rho_{i,0}} \left[\frac{k^2}{\mu_0 \omega} + \frac{\frac{q_i}{m_i} \rho_{i,0}}{\omega \pm \frac{q_i}{m_i} B_0} \right] = \pm \frac{B_0}{\rho_{i,0}} \left[\frac{\frac{k^2}{\mu_0} \left(\omega \pm \frac{q_i}{m_i} B_0 \right) + \frac{q_i}{m_i} \rho_{i,0} \omega}{\omega \left(\omega \pm \frac{q_i}{m_i} B_0 \right)} \right] \\ \Leftrightarrow \omega^2 \pm \omega \left[\frac{q_i}{m_i} B_0 - \frac{q_i}{m_i} B_0 - \frac{1}{\mu_0} \frac{B_0}{\rho_{i,0}} k^2 \right] - \frac{1}{\mu_0} \frac{q_i}{m_i} \frac{B_0^2}{\rho_{i,0}} k^2 &= 0 \\ \Rightarrow \omega_{1,2}(k) &= \mp \frac{B_0}{2\mu_0 \rho_{i,0}} k^2 \pm \sqrt{\left(\frac{B_0}{2\mu_0 \rho_{i,0}} k^2 \right)^2 + \frac{q_i B_0^2}{\mu_0 m_i \rho_{i,0}} k^2} \quad (2.22) \\ \Rightarrow v_{ph,1,2}(k) &= \frac{\omega_{1,2}(k)}{k} = \mp \frac{B_0}{2\mu_0 \rho_{i,0}} k \pm \sqrt{\left(\frac{B_0}{2\mu_0 \rho_{i,0}} k \right)^2 + \frac{q_i B_0^2}{\mu_0 m_i \rho_{i,0}}} \end{aligned}$$

Das Vorzeichen vor der Diskriminante kommt dabei durch die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung zustande; das andere stammt aus der Unterscheidung der L- und R-Moden.

Aus den folgenden Grenzfällen ergibt sich jeweils die Alfvén-Geschwindigkeit v_A und die Whistler-Geschwindigkeit v_W für die Ionenspezies.

$$\lim_{k \rightarrow 0} v_{ph,1,2}(k) = \pm \sqrt{\frac{q_i B_0^2}{\mu_0 m_i \rho_{i,0}}} = \pm \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_i n_{i,0}}} \stackrel{(2.18)}{=} \pm d_i \Omega_i := \pm v_{A,i} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \lim_{v_{A,i} \rightarrow 0} v_{ph,1,2}(k) &= \mp \frac{B_0}{2\mu_0 \rho_{i,0}} k \pm \frac{B_0}{2\mu_0 \rho_{i,0}} k \\ &= \begin{cases} 0 \\ \mp \frac{B_0}{\mu_0 \rho_{i,0}} k \stackrel{(2.18)}{=} \mp v_{A,i} \cdot d_i \cdot k := \mp v_{W,i} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aus dieser Dispersionsrelation lässt sich auch leicht jene aus vorigem Kapitel mit ruhenden Ionen insofern ableiten, als ihre Masse als so groß angenommen wird, dass sie den Oszillationen der Elektronen nur schwer folgen und somit als ruhend betrachtet werden können.

$$\lim_{m_i \rightarrow \infty} \omega(k) = \mp \frac{B_0}{\mu_0 \rho_{i,0}} k^2$$

2.3.5 Ionenakustische Wellen

Zuletzt wird ein kollisionsfreies Plasma im Hybrid-Modell untersucht, dessen Teilchen jeder Spezies s entlang eines angelegten B-Feldes oszillieren und somit longitudinale Wellen bilden.

$$\begin{aligned} n_s &= n_{s,0} + n_{s,1} e^{i(kz - \omega t)}, & \mathbf{u}_s &= u_{s,1} \hat{\mathbf{z}} e^{i(kz - \omega t)}, \\ \mathbf{E}_1 &= E_1 \hat{\mathbf{z}} e^{i(kz - \omega t)}, & \mathbf{B}_1 &= B_0 \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Dabei wird angenommen, dass sich die Elektronen isotherm verhalten, da kleinere Temperaturschwankungen sofort vom Elektronenfluid kompensiert werden, die Ionen jedoch adiabatisch ohne Austausch von thermischer Energie betrachtet werden.

$$\begin{aligned} p_e &= p_{e,0} + p_{e,1} e^{i(kz - \omega t)}, & T_e &= T_{e,0} \\ p_i &= p_{i,0} + p_{i,1} e^{i(kz - \omega t)}, & T_i &= T_{i,0} + T_{i,1} e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

Aus der Adiabatangleichung^{[3],S.61} mit dem Adiabatenkoeffizienten γ und der Kontinuitätsgleichung in der Darstellung mit der konvektiven Ableitung (2.8) kann dann folgender Zusammenhang hergeleitet werden.

$$\frac{Dp}{Dt} = -\gamma p (\nabla \cdot \mathbf{u}); \quad \frac{Dn}{Dt} = -n (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad \frac{Dp}{Dt} = \gamma \frac{p}{n} \frac{Dn}{Dt}$$

Ein ähnlicher Zusammenhang lässt sich mithilfe des idealen Gasgesetzes (2.9) auch aus den letzten beiden Gleichung für die Temperatur aufstellen.

$$\frac{Dn}{Dt} T + n \frac{DT}{Dt} = \gamma T \frac{Dn}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{DT}{Dt} = (\gamma - 1) \frac{T}{n} \frac{Dn}{Dt} = -(\gamma - 1) T (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Nach Linearisierung der Druckgradienten sowie den nachfolgenden Gleichungen wird die Dispersionsrelation ermittelt. Dabei geht die konvektive Ableitung in die partielle über, da das Plasma insgesamt in dieser Betrachtung ruht.

$$\begin{aligned} \text{Ionendruck adiabatisch: } -i\omega p_{i,1} &= \gamma p_{i,0} \frac{-i\omega n_{i,1}}{n_{i,0}} \\ \Rightarrow p_{i,1} &= \gamma p_{i,0} \frac{n_{i,1}}{n_{i,0}} \stackrel{(2.9)}{=} \gamma k_B T_{i,0} n_{i,1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{Elektronendruck isotherm: } p_{e,1} = k_B T_e n_{e,1}$$

$$\text{Hybrid E-Feld-Glg. (2.15): } E_1 = \frac{ik p_{e,1}}{\rho_{e,0}} = \frac{ikk_B T_e n_{e,1}}{q_e n_{e,0}} \stackrel{(2.16)}{=} \frac{ikk_B T_e n_{i,1}}{q_e n_{i,0}}$$

$$\text{Kontinuitätsglg. (2.5): } -i\omega n_{i,1} = -n_{i,0} (iku_{i,1}) \quad \Rightarrow \quad n_{i,0} = \frac{\omega n_{i,1}}{k u_{i,1}} \quad (2.26)$$

$$\text{Impulsbilanzglg. (2.7): } m_i n_{i,0} (-i\omega u_{i,1}) = q_i n_{i,0} E_1 - ik p_{i,1}$$

$$\Rightarrow m_i \left(\frac{\omega n_{i,1}}{k u_{i,1}} \right) (-i\omega u_{i,1}) = q_i n_{i,0} \left(\frac{ikk_B T_e n_{i,1}}{q_e n_{i,0}} \right) - ik (\gamma k_B T_{i,0} n_{i,1})$$

Für $n_{i,1} \neq 0$ ergibt sich die gesuchte Dispersionsrelation.

$$-im_i \frac{\omega^2}{k} = ik \frac{q_i}{q_e} k_B T_e - ik\gamma k_B T_{i,0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = -\frac{q_i}{q_e} \frac{k_B T_e}{m_i} + \gamma \frac{k_B T_{i,0}}{m_i}$$

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{-\frac{q_i}{q_e} \frac{k_B T_e}{m_i} + \gamma \frac{k_B T_{i,0}}{m_i}} := \pm v_{ac,i}$$

Aus der Linearisierung der Gleichung für die Temperatur kann die Amplitude der Störung von letzterer ermittelt werden.

$$-i\omega T_{i,1} = -(\gamma - 1)T_{i,0}(iku_{i,1})$$

$$\Rightarrow T_{i,1} = (\gamma - 1)T_{i,0} \frac{k}{\omega} u_{i,1} \stackrel{(2.26)}{=} (\gamma - 1)T_{i,0} \frac{n_{i,1}}{n_{i,0}} \quad (2.27)$$

2.4 Normierung

Zur Vereinfachung der verwendeten Gleichungen werden die vorkommenden Größen f in einen zeit- und ortsabhängigen Anteil \tilde{f} und einen Skalenteil f_0 zerlegt.

$$f(x, t) = \tilde{f}(x, t) \cdot f_0$$

Unter diesem Aspekt der Separation können die relevanten Gleichungen reduziert werden, indem eine Festlegung der Skalen erfolgt, weshalb sie in diesem Zusammenhang ein weiteres Mal untersucht werden.

Bewegungsgleichung der Ionen (2.1):

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}_{i,\alpha}}{d\tilde{t}} \frac{v_0}{t_0} = \frac{q_i}{m_i} \left[\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{v}}_{i,\alpha} \times \tilde{\mathbf{B}} \right] v_0 B_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{\mathbf{v}}_{i,\alpha}}{d\tilde{t}} = \underbrace{\frac{q_i B_0}{m_i}}_{\Omega_{i,0}} t_0 \left[\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{v}}_{i,\alpha} \times \tilde{\mathbf{B}} \right]$$

Maxwellgleichung (2.11):

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} \frac{E_0}{l_0} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} \frac{B_0}{t_0} \quad \rightarrow \quad E_0 = \frac{l_0}{t_0} B_0 = v_0 B_0$$

Hybrid E-Feld-Gleichung (2.15):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}v_0B_0 &= \frac{1}{\tilde{\rho}_i q_i n_0} \left[\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{j}}_i \right] \frac{B_0}{\mu_0 l_0} \times \tilde{\mathbf{B}} B_0 - \frac{\tilde{\nabla} \tilde{p}_e}{\tilde{\rho}_i} \frac{n_0 k_B T_0}{l_0 q_i n_0} - \tilde{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} \frac{\eta_0 B_0}{\mu_0 l_0} \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{E}} &= \frac{B_0}{v_0 l_0 \mu_0 q_i n_0} \frac{1}{\tilde{\rho}_i} \left[\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{j}}_i \right] \times \tilde{\mathbf{B}} - \frac{\tilde{\nabla} \tilde{p}_e}{\tilde{\rho}_i} \frac{k_B T_0}{q_i l_0 v_0 B_0} - \tilde{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} \frac{\eta_0}{\mu_0 l_0 v_0}\end{aligned}$$

mit $\frac{B_0}{\mu_0 q_i n_0} = \frac{v_{A,i,0}^2}{\Omega_{i,0}} = v_{A,i,0} d_{i,0}$ folgt:

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{E}} = \frac{v_{A,i,0} d_{i,0}}{v_0 l_0} \frac{1}{\tilde{\rho}_i} \left[\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{j}}_i \right] \times \tilde{\mathbf{B}} - \frac{\tilde{\nabla} \tilde{p}_e}{\tilde{\rho}_i} \frac{k_B T_0}{q_i l_0 v_0 B_0} - \tilde{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} \frac{\eta_0}{\mu_0 l_0 v_0}$$

Mit Wahl der Skalen entsprechend der zugehörigen Konstanten können letztere in allen Gleichungen eliminiert werden.

$$t_0 = \frac{1}{\Omega_{i,0}}, \quad l_0 = d_{i,0}, \quad v_0 = \frac{l_0}{t_0} = d_{i,0} \Omega_{i,0} = v_{A,i,0}, \quad T_0 = \frac{q_i B_0}{k_B} v_0 l_0, \quad \eta_0 = \mu_0 l_0 v_0$$

Weil die Skala der Teilchenzahldichte n_0 noch nicht näher spezifiziert ist, bietet es sich an, diese auf ein Volumenelement l_0^3 zu normieren.

$$n_0 l_0^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n_0 = \frac{1}{l_0^3} = \frac{1}{d_{i,0}^3} = \left(\frac{\mu_0 e^2 n_0}{m_i} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad n_0 = \left(\frac{m_i}{\mu_0 e^2} \right)^3$$

Die einzig noch zu wählende Skala ist jene der magnetischen Flussdichte B_0 . Zusammenfassend ergibt sich ein Satz aus den normierten Hybrid Gleichungen, deren Lösung numerisch mithilfe der Simulation erfolgen soll, was im folgenden Kapitel behandelt wird.

Hybrid Gleichungen:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}_{i,\alpha}}{d\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{v}}_{i,\alpha}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{v}}_{i,\alpha}}{d\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{v}}_{i,\alpha} \times \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\tilde{\rho}_i} \left[\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{j}}_i \right] \times \tilde{\mathbf{B}} - \frac{\tilde{\nabla} \tilde{p}_e}{\tilde{\rho}_i} - \tilde{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} \quad (2.29)$$

Gewählte Skalen:

$$\begin{aligned}
 n_0 &= \frac{1}{l_0^3} = \frac{1}{d_{i,0}^3} = \left(\frac{m_i}{\mu_0 q_i^2} \right)^3, & l_0 &= d_{i,0} = \sqrt{\frac{m_i}{\mu_0 q_i^2 n_0}} = \frac{\mu_0 q_i^2}{m_i}, \\
 t_0 &= \frac{1}{\Omega_{i,0}} = \frac{m_i}{q_i} \frac{1}{B_0}, & v_0 &= v_{A,i,0} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_i n_0}} = \frac{\mu_0 q_i^3}{m_i^2} B_0 \\
 \eta_0 &= \mu_0 l_0 v_0 = \frac{\mu_0^3 q_i^5}{m_i^3} B_0, & T_0 &= \frac{q_i B_0}{k_B} v_0 l_0 = \frac{m_i}{k_B} v_0^2 = \frac{\mu_0^2 q_i^6}{k_B m_i^3} B_0^2
 \end{aligned}$$

Im Folgenden werden alle Größen als normiert angenommen (keine „~“-Konvention mehr).

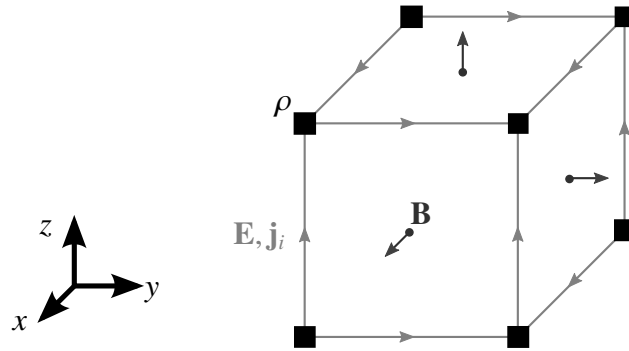
3 Numerische Implementation

Die Realisierung des Hybrid-Codes baut auf dem PIC-Teil des „Placebo“-Codes auf, dessen grundlegende Bestandteile übernommen und solche, die relevant sind, hier kurz vorgestellt werden. Anschließend werden zwei Sätze von numerischen Lösungen der Hybrid-Gleichungen erläutert.

3.1 Yee-Gitter und Parallelisierung

Zur Simulation im dreidimensionalen Raum wird ein Gittermodell betrachtet, auf dessen Zellen die für die Simulation relevanten Größen an den in der Abbildung 3.1 gezeigten Stellen gespeichert werden. Dieses Gitter, nach Yee^[11] benannt, wird auch im PIC-Code verwendet. Die Positionen der Ionen innerhalb der Zellen werden relativ zu den Zellgrenzen nach dem Area-Weighting-Verfahren^[1] gespeichert, woraus auch Ladungsdichte und Stromdichte der Ionen ermittelt werden können.

Zur Verringerung der Rechenzeit durch Parallelisierung des Programms wird dieses Gitter auf eine beliebige Zahl gleich großer Blöcke weiter unterteilt, für welche jeweils ein Prozessor die Berechnungen übernehmen kann. Um den Teilchenaustausch zu gewährleisten, ist jeder Block vollständig von einer Schale sogenannter Geisterzellen umgeben, in welche jene Teilchen geschrieben werden, die eine Blockgrenze passieren. Eine Bedingung hierfür ist allerdings, dass kein

Abbildung 3.1: Gitter nach Yee^[11]

Teilchen mehr als eine Zellgrenze in einem Iterationsschritt überschreitet, was in dem Abschnitt 3.3 berücksichtigt wird. Am Ende eines jeden Iterationsschrittes werden die Teilchen aus den Geisterzellen sowie die gespeicherten Werte des Yee Grids mit den Zellen der benachbarten Blöcke synchronisiert.

3.2 Makroteilchen

Die Anzahl aller Teilchen einer Spezies kann aus der jeweiligen, anfänglichen Teilchenzahldichte n ermittelt werden.

$$N = \int_V d^3x n(x) \xrightarrow{\text{Gitter}} \sum_{i,j,k} n_{i,j,k} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Da es in der Simulation nicht unbedingt wirtschaftlich ist, alle Teilchen separat zu betrachten, werden so genannte Makroteilchen eingeführt, die für eine Vielzahl von Teilchen stehen. So kann durch Vorgabe einer festgelegten Teilchenzahl N_{Num} Einfluss auf die Teilchenaufösung der Simulation genommen werden.

$$N = N_{num} \cdot \frac{Q_{num}}{q} \Rightarrow \frac{Q_{num}}{q} = \frac{M_{num}}{m} = \frac{1}{N_{num}} \sum_{i,j,k} n_{i,j,k} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

3.3 Zeitauflösung

Um, wie bereits erwähnt, das Überschreiten eines Teilchens über mehrere Zellgrenzen hinaus zu unterbinden, wird der maximal mögliche Zeitschritt über eine nachfolgend angegebene CFL-Bedingung^[5] ermittelt. In dieser entspricht Δx_{min} genau der kleinsten Seitenlänge einer Zelle, die in diesem Code quaderförmig sind. Der so ermittelte Zeitschritt muss jeweils nach einer sinnvoll gewählten Zahl an Iterationsschritten aktualisiert werden.

$$c = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow \Delta x_{min}; u \rightarrow v_{max}} \Delta t = \frac{c\Delta x_{min}}{v_{max}}$$

Zur Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit innerhalb des Plasmas, die in der Berechnung des Zeitschritts verwendet wird, müssen sowohl die Teilchengeschwindigkeiten v_i als auch die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Plasmawellen v_{PW} berücksichtigt werden. Für Letztere wird als Höchstgeschwindigkeit die Summe von Alfvén- und Whistler-Geschwindigkeit als strenge Bedingung gewählt, die sich jedoch beide aus ortsabhängigen Größen ergeben. Somit muss für die Berechnungen die jeweils größtmögliche Geschwindigkeit innerhalb des Plasmas gesucht werden, was hier symbolisch durch die Funktion „maxongrid()“ repräsentiert wird.

$$v_{PW,max} = \text{maxongrid}(v_{A,i} + v_{W,i}) = \text{maxongrid}\left(\frac{B_0}{\sqrt{\rho_i}} + \frac{B_0}{\rho_i} \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$$

$$\Rightarrow v_{max} = \max [v_{i,max}; v_{PW,max}]$$

3.4 Numerische Lösungen der Hybrid-Gleichungen

Die Lösung der Hybrid-Gleichungen (2.28) und (2.29) erfolgt numerisch, bei der möglichst viele Bestandteile aus dem bisherigen „Placebo“-Code übernommen werden sollen, um das Programm übersichtlich und klein zu halten. Die Lösung der Ionenkinetik ist so zu großen Teilen aus dem PIC-Code entnommen, dessen Algorithmus zur Aktualisierung der Teilchengeschwindigkeiten auf dem von Boris^[2] basiert und dessen Realisierung im Code nachfolgend skizziert wird. Zu Beginn eines Iterationsschritts müssen dazu die Werte \mathbf{v}_α^n , $\mathbf{E}\{\mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}\}$, $\mathbf{B}\{\mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}\}$ bekannt sein.

$$\left. \begin{aligned}
 1. \quad \mathbf{v}_\alpha^- &= \mathbf{v}_\alpha^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{E}\{\mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}\} \\
 2. \quad \mathbf{v}'_\alpha &= \mathbf{v}_\alpha^- + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_\alpha^- \times \mathbf{B}\{\mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}\} \\
 3. \quad \mathbf{v}_\alpha^+ &= \mathbf{v}_\alpha^- + \frac{\Delta t}{1 + \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}\{\mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}\}\right)^2} \mathbf{v}'_\alpha \times \mathbf{B}\{\mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}\} \\
 4. \quad \mathbf{v}_\alpha^{n+1} &= \mathbf{v}_\alpha^+ + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{E}\{\mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}\}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Aus der Maxwell-Gleichung (2.11) kann die zeitliche Entwicklung des Magnetfeldes durch das elektrische Feld beschrieben werden. Das elektrische Feld jedoch ergibt sich nach der Hybrid-Gleichung (2.29) erst aus den Größen ρ_i , \mathbf{j}_i , \mathbf{B} , was ein Problem darstellt, da das elektrische Feld bereits im Boris-Schritt zu einem fortgeschrittenen Zeitpunkt feststehen muss. Es müssen daher andere Möglichkeiten gefunden, das elektrische Feld zum gewünschten Zeitpunkt darzustellen. Zwei Versuche, dieser Aufgabe gerecht zu werden, werden im Folgenden erläutert.

3.4.1 Versuch 1: Extrapolation des E-Feldes

Durch Extrapolation des elektrischen Feldes aus den beiden letzten bekannten Werten desjenigen wird ein näherungsweise bestimmter Wert für den Boris-Schritt bereitgestellt. Dieses Verfahren wird im Kontext der vorigen Aussagen in das nachfolgend aufgeführte Lösungsverfahren eingebunden. Zur Ausführung eines Iterationsschrittes des Verfahrens müssen die Werte \mathbf{x}_α^n , \mathbf{v}_α^n , ρ_i^n , ρ_i^{n-1} , \mathbf{j}_i^n , \mathbf{j}_i^{n-1} , \mathbf{B}^n , \mathbf{B}^{n-1}

anfangs gegeben sein.

1. $\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^{n-1} - 2\Delta t \nabla \times \mathbf{E} \{ \mathbf{B}^n, \rho_i^n, \mathbf{j}_i^n \}$
2. $\mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}^n + \mathbf{B}^{n+1}}{2}$
3. $\mathbf{E}^* = \frac{3}{2} \mathbf{E} \{ \mathbf{B}^n, \rho_i^n, \mathbf{j}_i^n \} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \{ \mathbf{B}^{n-1}, \rho_i^{n-1}, \mathbf{j}_i^{n-1} \}$
4. $\mathbf{x}_\alpha^* = \mathbf{x}_\alpha^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_\alpha^n$
5. Boris-Schritt (3.1) \mathbf{v}_α^{n+1} mit: $\mathbf{B}^* \{ \mathbf{x}_\alpha^* \}$, $\mathbf{E}^* \{ \mathbf{x}_\alpha^* \}$
6. $\mathbf{x}_\alpha^{n+1} = \mathbf{x}_\alpha^* + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_\alpha^{n+1}$
7. Auflösen von $\rho_i^{n+1} \{ \mathbf{x}_\alpha^{n+1} \}$, $\mathbf{j}_i^{n+1} \{ \mathbf{x}_\alpha^{n+1}, \mathbf{v}_\alpha^{n+1} \}$ vom Gitter

Das verwendete Extrapolationsverfahren ist ein Verfahren zweiter Ordnung, was im Folgenden durch Reihenentwicklungen in der Zeit bestätigt wird.

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \mathbf{E}(t^n) - \frac{1}{2} \mathbf{E}(t^n - \Delta t) \\
& \approx \frac{3}{2} \left[\mathbf{E} \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) + \mathbf{E}' \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \left(t^n - \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) + O(\Delta t^2) \right] \\
& \quad - \frac{1}{2} \left[\mathbf{E} \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) + \mathbf{E}' \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \left((t^n - \Delta t) - \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) + O(\Delta t^2) \right] \\
& = \mathbf{E} \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) + \mathbf{E}' \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \underbrace{\left[\frac{3}{2} \left(-\frac{\Delta t}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{3\Delta t}{2} \right) \right]}_{=0} + O(\Delta t^2) \\
& = \mathbf{E} \left(t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) + O(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

3.4.2 Versuch 2: E-Feld Predictor

Im Verfahren nach Matthews^[8] wird eine besondere Form der Stromdichte genutzt, die aus Kombinationen von Ortskoordinaten und Geschwindigkeiten der Ionen zu verschiedenen Zeitpunkten zusammengesetzt sind, nämlich $\mathbf{j}_i^{n,+} \{ \mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}, \mathbf{v}_\alpha^n \}$, $\mathbf{j}_i^{n,-} \{ \mathbf{x}_\alpha^{n-1/2}, \mathbf{v}_\alpha^n \}$. Zur Ermöglichung dieser Größen wird in diesem Lösungsverfahren eine Staffelung von Koordinaten und Geschwindigkeiten der Teilchen verwendet, was durch einen anfänglichen halben Orts-Schritt $\mathbf{x}_\alpha^{1/2} = \mathbf{x}^0 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_\alpha^0$ bewerk-

stellt wird. Damit lässt sich mit einem Zwischenwert des elektrischen Feldes \mathbf{E}^* , der sich aus $\rho_i^{n+1/2}, \mathbf{j}_i^{n,+}, \mathbf{B}^{n+1/2}$ bildet, ein Ausdruck für $\mathbf{j}_i^{n+1/2}$ finden, aus dem dann das elektrische Feld $E^{n+1/2}$ für den Boris-Schritt bereitgestellt wird. Die Zeitentwicklung des magnetischen Feldes nach Maxwell-Gleichung (2.11) wird durch ein Runge-Kutta-Verfahren ermöglicht. Das gesamte Lösungsverfahren, das vor jedem Iterationsschritt die Existenz der Größen $\mathbf{x}_\alpha^{n+1/2}, \mathbf{v}_\alpha^n, \rho_i^n, \rho_i^{n+1/2}, \mathbf{j}_i, \mathbf{j}_i^{n,+}, \mathbf{B}^n$ voraussetzt, wird nachfolgend aufgeführt.

1.
$$\mathbf{B}^{n+1/2} = - \int_n^{n+1/2} \nabla \times \mathbf{E} \{ \mathbf{B}^n, \rho_i^n, \mathbf{j}_i^n \} dt \quad \text{mit Runge-Kutta}$$
2.
$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} \{ \mathbf{B}^{n+1/2}, \rho_i^{n+1/2}, \mathbf{j}_i^{n,+} \} \quad \text{nach (2.15)}$$
3.
$$\mathbf{j}_i^{n+1/2} = \mathbf{j}_i^+ + \frac{\Delta t}{2} \left(\rho_i^{n+1/2} \mathbf{E}^* + \mathbf{j}_i^+ \times \mathbf{B}^{n+1/2} \right)$$
4. Boris-Schritt (3.1) mit: $\mathbf{B}^{n+1/2}, \mathbf{E} \{ \mathbf{B}^{n+1/2}, \rho_i^{n+1/2}, \mathbf{j}_i^{n+1/2} \}$ nach (2.15)
5.
$$x_\alpha^{n+3/2} = x_\alpha^{n+1/2} + \Delta t v_\alpha^{n+1}$$
6. Auflösen von $\rho_i^{n+3/2} \{ x_\alpha^{n+3/2} \}, \mathbf{j}_i^{n+1,+} \{ x_\alpha^{n+3/2}, \mathbf{v}_\alpha^{n+1} \}, \mathbf{j}_i^{n+1,-} \{ x_\alpha^{n+1/2}, \mathbf{v}_\alpha^{n+1} \}$ vom Gitter
7. Mittelung von $\rho_i^{n+1} = \frac{\rho_i^{n+1/2} + \rho_i^{n+3/2}}{2}, \mathbf{j}_i^{n+1} = \frac{\mathbf{j}_i^{n+1,-} + \mathbf{j}_i^{n+1,+}}{2}$
8.
$$\mathbf{B}^{n+1} = - \int_{n+1/2}^{n+1} \nabla \times \mathbf{E} \{ \mathbf{B}^{n+1}, \rho_i^{n+1}, \mathbf{j}_i^{n+1} \} dt \quad \text{mit Runge-Kutta}$$

Die Realisierung des verwendeten, dreistufigen Runge-Kutta-Verfahrens nach Shu/Osher^[9] im Programm wird im Folgenden skizziert, wobei die Größen mit Index (0) zu Beginn des Verfahrens bekannt sind.

$$\mathbf{B}^{n+1} = - \int_n^{n+1} \nabla \times \mathbf{E} \{ \mathbf{B}^{(0)}, \rho_i^{(0)}, \mathbf{j}_i^{(0)} \} \rightarrow$$

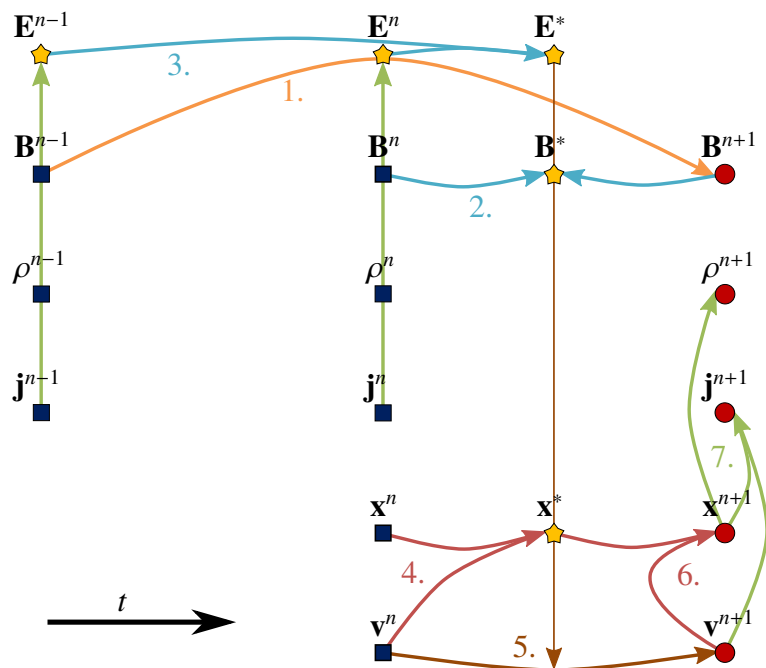
$$\text{Runge-Kutta Schritt 1: } \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}^n - \Delta t \nabla \times \mathbf{E}^n$$

$$\text{E-Feld Aktualisierung: } \mathbf{E}^{(1)} \{ \mathbf{B}^{(1)}, \rho_i^{(0)}, \mathbf{j}_i^{(0)} \}$$

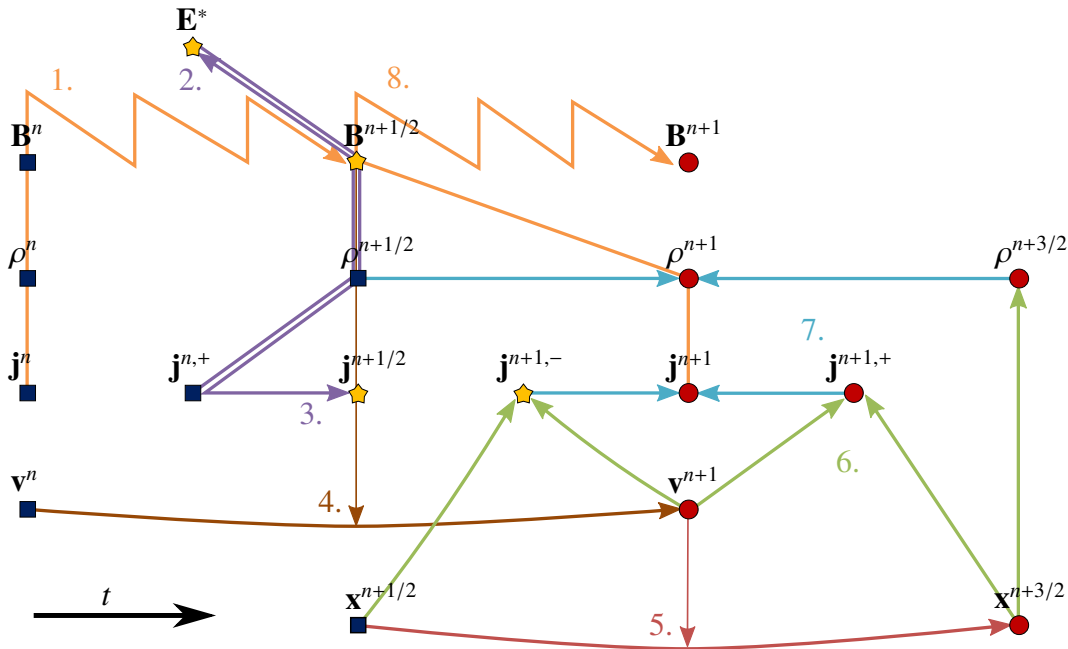
$$\text{Runge-Kutta Schritt 2: } \mathbf{B}^{(2)} = \frac{1}{4} \left[\mathbf{B}^{(1)} - \Delta t \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} \right] + \frac{3}{4} \mathbf{B}^{(0)}$$

$$\text{E-Feld Aktualisierung: } \mathbf{E}^{(2)} \{ \mathbf{B}^{(2)}, \rho_i^{(0)}, \mathbf{j}_i^{(0)} \}$$

$$\text{Runge-Kutta Schritt 3: } \mathbf{B}^{(3)} = \frac{2}{3} \left[\mathbf{B}^{(2)} - \Delta t \nabla \times \mathbf{E}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} \mathbf{B}^{(1)} \hat{=} \mathbf{B}^{n+1}$$



(a) Schema zum Lösungsverfahren aus Kapitel 3.4.1



(b) Schema zum Lösungsverfahren aus Kapitel 3.4.2

Abbildung 3.2: Schemata der Lösungsverfahren vorangegangener Kapitel. Die Größen mit Quadrat sind die zu Anfang des Verfahrens benötigten, jene mit Kreis müssen für den nächsten Iterationsschritt bereitstehen. Die mit Sternchen abgebildeten Größen werden nur temporär erfordert.

Aufgrund der Erwartung besserer energieerhaltener Eigenschaften und der Popularität wird das hier erläuterte Verfahren dem vorherigen vorgezogen und in den nachfolgenden Tests validiert.

4 Validierung

Zur Validierung des Hybrid-Codes werden Plasmen entsprechend der in Kapitel 2.3 hergeleiteten Dispersionsrelationen initialisiert und überprüft, ob diese die entsprechende, erwartete Wellendynamik reproduzieren.

Hierzu wird ein externes Magnetfeld entlang der z -Richtung simuliert, welches ein näherungsweise eindimensionales Plasma durchsetzt. Dieses wird insofern konstruiert, als die Anzahl der Zellen in x - und y -Richtung senkrecht zur Richtung des angelegten Magnetfeldes auf zwei gesetzt wird, denn mit periodischen Randbedingungen und durch die im Algorithmus geforderte Mittlung der Größen über benachbarte Zellen sind die berechneten Werte der Stromdichte j in diesen gleich. Die Gebietsgröße bleibt in allen Tests identisch. Um Wellencharakteristika zu untersuchen, wird das Plasma mit der Wellenzahl $k_z = n \frac{2\pi}{L_z}$ initialisiert, wobei n die Anzahl der Moden und L_z die Länge des Gebiets in z -Richtung beschreibt. Zunächst werden alle Simulationen auf nur einem Block ausgeführt, um Fehler in der Parallelisierung auszuschließen, deren mögliche Auswirkungen in einem letzten, einzelnen Test untersucht werden.

Durch Auswertung mit dem Programm „VisIt“ wird die Periodendauer T der konstruierten Wellen ausgelesen und auf Übereinstimmung mit den entsprechenden Werten aus der Dispersionsrelation überprüft. Dabei wird versucht, die Bilder der Simulationsergebnisse aus „VisIt“ von einem zum nächstmöglichen Zeitschritt zur Deckung zu bringen, sodass genau eine Periode vergeht - die Differenz der zu den Schritten gehörenden Zeitpunkte t_1 und t_2 ergibt dann die gesuchte Periodendauer $T = t_2 - t_1$. Zur Fehlerabschätzung werden die Zeitpunkte des jeweils folgenden Schritts $t_{1,+}$ und $t_{2,+}$ und des vorigen Schritts $t_{1,-}$ und $t_{2,-}$ bezüglich der beiden Messpunkte genutzt, um den Gesamtfehler der Periodendauer ΔT nach folgender Formel zu berechnen.

$$\Delta T = \max \left[|(t_{2,+} - t_{1,-}) - T| ; |(t_{2,-} - t_{1,+}) - T| \right]$$

Zur Validierung werden die so erhaltenen Periodendauern mit den exakten Werten verglichen. In den Graphen wird die Periodendauer T gegenüber der Modenzahl n aufgetragen, wobei die Messpunkte den Simulationsergebnissen und die Kurven den exakten Werten entsprechen. Dabei werden abseits der Variation der Modenzahl auch andere Werte in den jeweiligen Dispersionsrelationen verändert, um Fehler in diesen auszuschließen. Die konkreten Initialisierungen und Ergebnisse werden im Folgenden näher erläutert.

4.1 Wellen in magnetisierten Plasmen

Zur Simulation von Wellen im magnetisierten Plasmen basierend auf den Kapiteln 2.3.3 und 2.3.4 wird eine Oszillation des magnetischen Feldes entlang der x- und y-Richtung angenommen. Das elektrische Feld ergibt sich dann direkt aus der entsprechenden Gleichung des Hybrid-Modells. Aus den Dispersionsrelationen (2.19) und (2.22) folgend werden in diesem Test R-Moden initialisiert, bei denen in der Phasengeschwindigkeit das Vorzeichen der Diskriminante mit dem durch die Mode vorgegebenen übereinstimmt. Die anderen Fälle lassen sich ebenso gut reproduzieren, sodass es genügt, nur diesen genannten Fall zu untersuchen. Um nun die Ionen für den oszillierenden Fall zu initialisieren, werden die Gleichungen (2.20) und (2.21) benötigt.

$$\begin{aligned} \text{Magnetfeld: } B_x &= B_{1,L} \cos(k_z z); & B_y &= -B_{1,L} \sin(k_z z); & B_z &= B_0 \\ \text{Ionengeschw.: } u_{i,1,L} &\stackrel{(2.21)}{=} \frac{iE_1}{\omega + B_0} \stackrel{(2.20)}{=} -\frac{v_{ph} B_1}{\omega + B_0} \\ v_x &= u_{i,1,L} \cos(k_z z); & v_y &= -u_{i,1,L} \sin(k_z z); & v_z &= 0 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Simulation für den Fall ruhender und oszillierender Ionen sind in Tabelle 4.1 aufgeführt, die in Abbildung 4.1 mit der exakten Periodendauer als Funktion von n veranschaulicht sind, welche hier der Vollständigkeit halber hergeleitet werden.

$$\begin{aligned} \text{ruhende Ionen: } T(n) &= \frac{2\pi}{\omega} \stackrel{(2.19)}{=} \frac{\rho_{i,0}}{B_0} \frac{L_z^2}{2\pi n_z^2} \\ \text{oszillierende Ionen: } T(n) &\stackrel{(2.22)}{=} \left[-\frac{B_0 \pi}{\rho_{i,0}} \left(\frac{n}{L_z} \right)^2 - \sqrt{\left(\frac{B_0 \pi}{\rho_{i,0}} \left(\frac{n}{L_z} \right)^2 \right)^2 + \frac{B_0^2}{\rho_{i,0}} \left(\frac{n}{L_z} \right)^2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung zeigt eine sehr gute Übereinstimmung in beiden Fällen, was für den Hybrid-Code spricht. Auf die Fehlerbalken hätte in diesem Zusammenhang auch aufgrund von Geringfügigkeit verzichtet werden können, jedoch wurden sie der Vollständigkeit halber angegeben.

Tabelle 4.1: Ergebnisse der Tests mit Wellen in magnetisierten Plasmen und den folgenden Parametern:

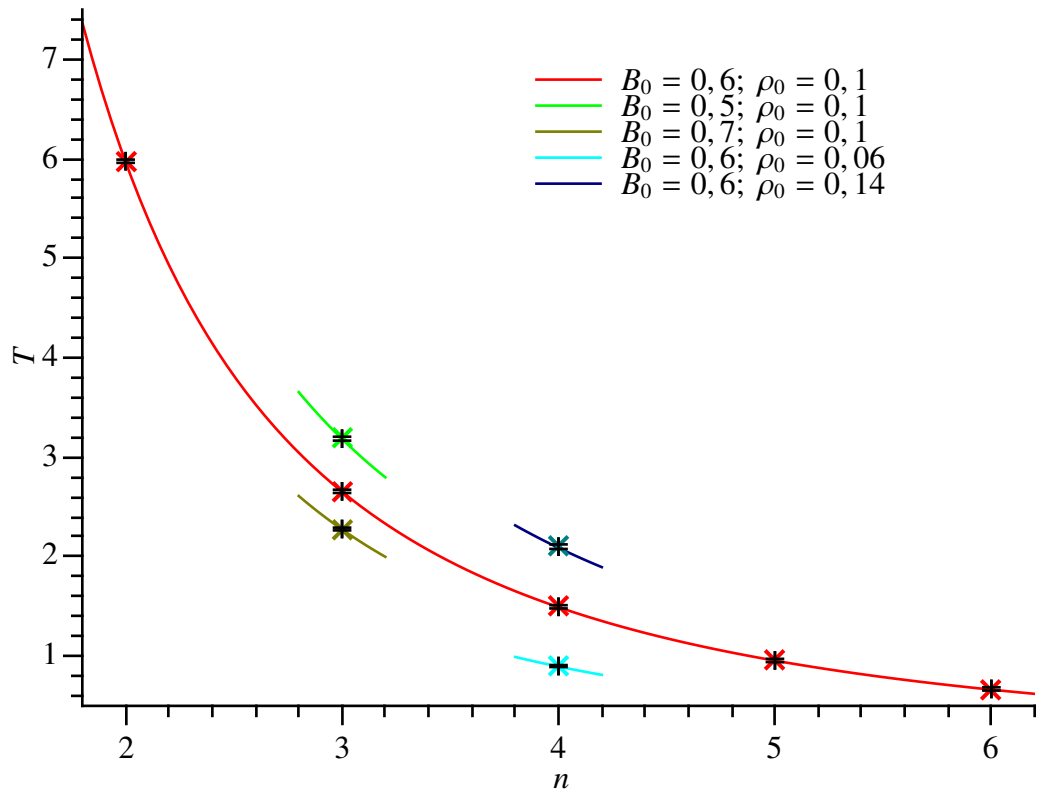
$cf_l = 0,5$; $L_z = 30$; 120 Zellen; Ausgabe alle 10 Schritte

(a) Periodendauern für ruhende Ionen mit den Parametern: $N = 0$; $B_1 = 0,3$

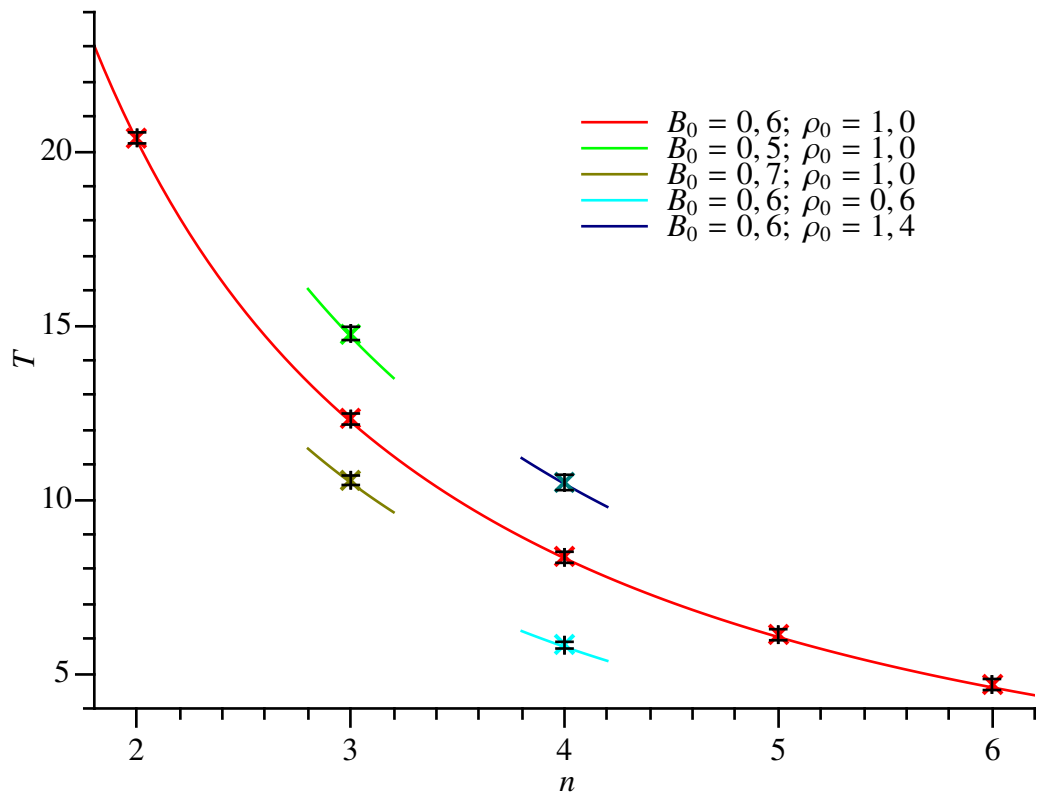
n	B_0	$\rho_{i,0}$	T	ΔT	T_{exakt}	$T - T_{exakt}$
2	0,6	0,1	5,975	0,016	5,968	0,007
3	0,6	0,1	2,657	0,016	2,653	0,004
4	0,6	0,1	1,496	0,016	1,492	0,004
5	0,6	0,1	0,956	0,016	0,955	0,001
6	0,6	0,1	0,670	0,016	0,663	0,007
3	0,5	0,1	3,186	0,020	3,183	0,003
3	0,7	0,1	2,278	0,014	2,274	0,004
4	0,6	0,06	0,900	0,010	0,895	0,005
4	0,6	0,14	2,100	0,023	2,089	0,011

(b) Periodendauern für zirkular oszillierende Ionen mit den Parametern: $N = 3000000$; $B_1 = 0,03$

n	B_0	$\rho_{i,0}$	T	ΔT	T_{exakt}	$T - T_{exakt}$
2	0,6	1,0	20,39	0,16	20,31	0,08
3	0,6	1,0	12,31	0,16	12,23	0,08
4	0,6	1,0	8,34	0,16	8,32	0,03
5	0,6	1,0	6,12	0,16	6,05	0,07
6	0,6	1,0	4,69	0,16	4,61	0,08
3	0,5	1,0	14,77	0,19	14,68	0,09
3	0,7	1,0	10,56	0,14	10,49	0,07
4	0,6	0,6	5,82	0,10	5,77	0,05
4	0,6	1,4	10,49	0,22	10,45	0,04



(a) Graph zu ruhenden Ionen (Tabelle 4.1a)



(b) Graph zu zirkular oszillierenden Ionen (Tabelle 4.1b)

Abbildung 4.1: Graphische Darstellung der Ergebnisse aus Tabelle 4.1

4.2 Ionenakustische Wellen

Die longitudinalen, von den Ionen getragenen Wellen nach Kapitel 2.3.5 werden anfänglich durch eine periodische Störung in der Teilchenzahldichte entlang der z-Richtung erzeugt. Entsprechendes gilt auch für die Geschwindigkeitsverteilung, für die jedoch zusätzlich der makroskopische Begriff der Temperatur auf die einzelnen Teilchen zurückübersetzt werden muss. Hierzu wird zusätzlich zur Geschwindigkeitsmodulation nach der Dispersionsrelation noch die thermische Bewegung berücksichtigt, deren Konstruktion aus einer Normalverteilung um die normierte, thermische Geschwindigkeit der Ionen $v_{Therm} = \sqrt{T_i}$ hervorgeht, die im Programm durch Multiplikation von Letzterem mit einer normalverteilten Zufallszahl bewerkstelligt wird, welche nachfolgend aus einer Funktion „Gauss()“ stammt. Weil alle Tests in einem eindimensionalen Plasma ablaufen, wird der in der Temperaturdistribution der Ionen auftauchende Adiabatenkoeffizient $\gamma = \frac{f+2}{f}$ auf drei gesetzt.

Ionenverteilung: $n_i = n_{i,0} + n_{i,1} \cos(k_z z)$

$$\text{Temperatur: } T_{i,1} \stackrel{(2.27)}{=} T_{i,0}(\gamma - 1) \frac{n_{i,1}}{n_{i,0}} \rightarrow T_i = T_{i,0} + T_{i,1} \cos(k_z z)$$

$$\text{Ionengeschw.: } u_{i,1} \stackrel{(2.26)}{=} v_{ph,ac} \frac{n_{i,1}}{n_{i,0}}$$

$$v_x = v_y = v_{Therm} \cdot \text{Gauss}(); \quad v_z = u_{i,1} \cos(k_z z) + v_{Therm} \cdot \text{Gauss}()$$

In folgender Tabelle 4.2 sind die Simulationsergebnisse für jeweils kalte Ionen ($T_i = 0$) und warme Ionen ($T_i > 0$) aufgeführt, die jeweils in der Abbildung 4.2, wie bereits aus den vorigen Tests bekannt, mit der exakten Periodendauer als Funktion von n dargestellt sind.

$$\begin{aligned} \text{kalte Ionen: } T(n) &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{T_e}} \frac{L_z}{n} \\ \text{warme Ionen: } T(n) &= \frac{1}{\sqrt{T_e + \gamma T_i}} \frac{L_z}{n} \end{aligned}$$

Dabei fallen größere Abweichungen von der exakten Periodendauer auf, von denen einige wenige sogar die ermittelten Fehler übersteigen. Weiterhin lässt sich

beim Fall warmer Ionen im Gegensatz zum Fall kalter Ionen eine Streuung der Werte um die Kurve erkennen, was vermuten lässt, dass dieser Zusammenhang abhängig von der Initialisierung der Teilchen ist. Weil in Simulationen die Gesamtteilchenzahl verhältnismäßig klein verglichen mit der eines echten Plasmas ist und die untersuchte Welle im Gegensatz zu den Wellen aus vorigem Kapitel von den Teilchen getragen wird, muss die Teilchenzahl möglichst nahe an die eines natürlichen Plasmas kommen, um die Welle und auch die Temperatur vernünftig repräsentieren zu können. Somit könnte eine höhere Teilchendichte diesen Fehler in der Simulation verringern. Des Weiteren wird die Welle nach kurzer Zeit, typischerweise nach etwa einer Periodendauer, bereits so stark gedämpft, dass kaum noch eine Welle wahrgenommen werden kann, was wahrscheinlich auf den Effekt der Landau-Dämpfung zurückzuführen ist. Diese Beobachtung lässt sich in Abbildung 4.3 wiederfinden. Eine ausführlichere Betrachtung dieses Zusammenhangs soll im folgenden Abschnitt zusammen mit einer Untersuchung der Energieerhaltung vorgenommen werden.

Tabelle 4.2: Ergebnisse der Tests mit ionenakustischen Wellen und den folgenden Parametern:

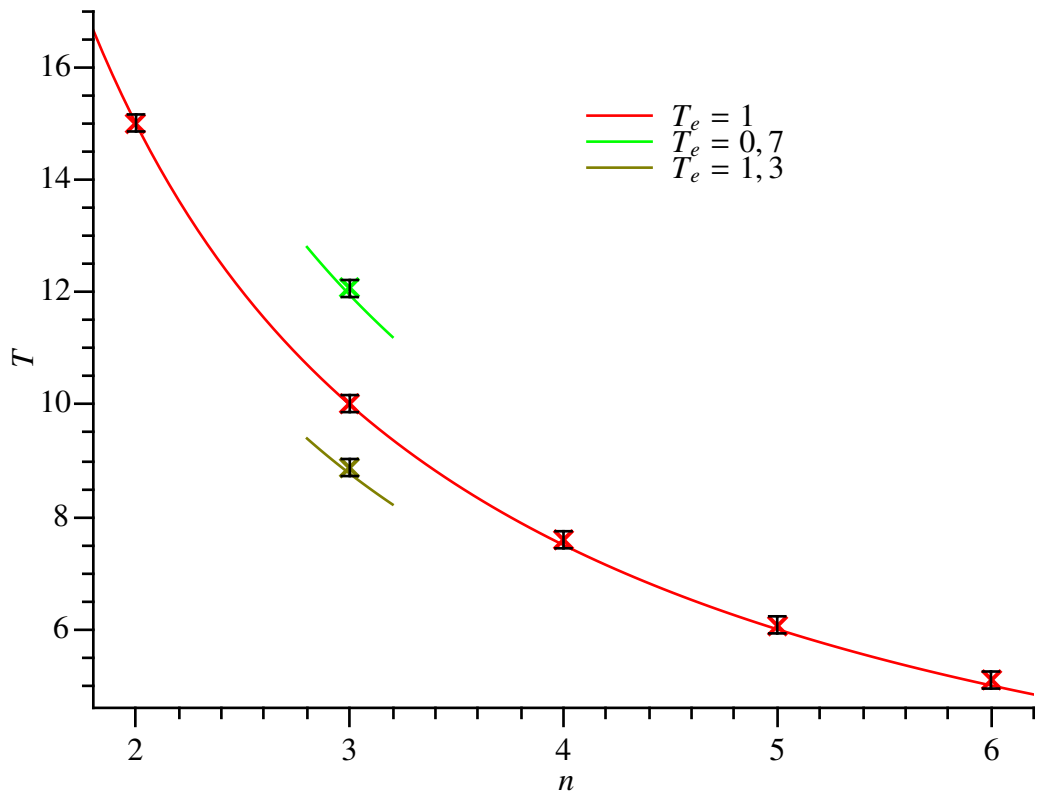
$B_0 = 0,6$; $\rho_{i,0} = 1,0$; $\rho_{i,1} = 0,05$; $L_z = 30$; 120 Zellen; Ausgabe alle 10 Schritte

(a) Periodendauern für kalte Ionen mit den Parametern:
 $N = 12000000$; $T_i = 0$; $cfl = 0,5$

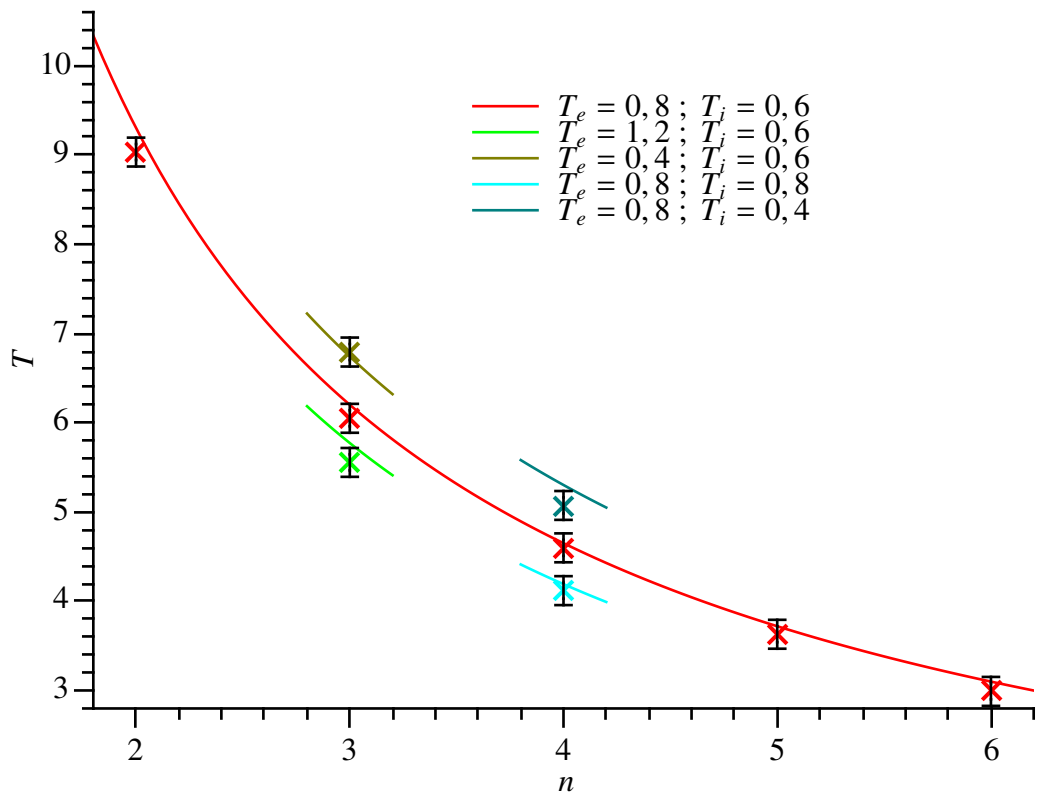
n	T_e	T	ΔT	T_{exakt}	$T - T_{exakt}$
2	1	15,02	0,15	15,00	0,02
3	1	10,02	0,15	10,00	0,02
4	1	7,59	0,15	7,50	0,09
5	1	6,08	0,15	6,00	0,08
6	1	5,10	0,15	5,00	0,10
3	0,7	12,07	0,15	11,95	0,12
3	1,3	8,88	0,15	8,77	0,11

(b) Periodendauern für warme Ionen mit den Parametern:
 $N = 24000000$; $cfl = 0,1$

n	T_e	T_i	T	ΔT	T_{exakt}	$T - T_{exakt}$
2	0,8	0,6	9,03	0,16	9,30	-0,27
3	0,8	0,6	6,05	0,16	6,20	-0,15
4	0,8	0,6	4,60	0,16	4,65	-0,05
5	0,8	0,6	3,63	0,16	3,72	-0,09
6	0,8	0,6	2,99	0,16	3,10	-0,11
3	1,2	0,6	5,56	0,16	5,77	-0,22
3	0,4	0,6	6,79	0,16	6,74	0,05
4	0,8	0,8	4,12	0,16	4,19	-0,07
4	0,8	0,4	5,07	0,16	5,30	-0,23



(a) Graph zu kalten Ionen (Tabelle 4.2a)



(b) Graph zu warmen Ionen (Tabelle 4.2b)

Abbildung 4.2: Graphische Darstellung der Ergebnisse aus Tabelle 4.2

4.3 Energieerhaltung

Zur Überprüfung der Abhängigkeit der Simulationsergebnisse von der Teilchenzahl und zur Überprüfung der Energieerhaltung dienen die nachfolgenden Tests. Hierfür eignet sich ein Extremfall mit vielen Teilchen, die über einen langen Zeitraum simuliert werden sollen, weshalb eine Konfiguration aus einem Test der ionenakustischen Wellen mit warmen Ionen gewählt wird. Es werden vier Tests mit verschiedenen Teilchenzahlen, aber sonst gleichen Parametern initialisiert, und zwar mit der Modenzahl $n = 1$, da so klarere Konturen aufgrund einer höheren Auflösung der Wellen erwartet werden.

Die Energien der Plasmakonstellationen aus den Tests werden durch einen Algorithmus aus dem PIC-Code ausgelesen und der zeitliche Verlauf der Gesamtenergie in Abbildung 4.4 dargestellt. Hierbei fällt auf, dass für den Fall mit 2400 Teilchen die Teilchenauflösung nicht ausreicht und die Simulation numerisch instabil wird. In den anderen Fällen jedoch liegen die relativen Änderungen der Feldenergien, der Teilchenenergien und der Gesamtenergien in der Größenordnung einiger Promille, was für gute energieerhaltende Eigenschaften des verwendeten Algorithmus spricht.

Zur besseren Erkennbarkeit der Kurvenverläufe der beiden Fälle mit den meisten Teilchen werden diese separat in Abbildung 4.4b ein weiteres Mal aufgeführt. Interessant ist hierbei die einmalige, markante Änderung des Energieniveaus, die in der Abbildung ersichtlich in einem Zeitraum von drei bis zehn Zeitskalen geschieht und im Folgenden analysiert werden soll. Bei Untersuchung der anderen Größen im Plasma fällt auf, dass die Störampplitude in diesem Intervall abnimmt, aber Stromdichte und elektrisches Feld über den gesamten Zeitraum nur den üblichen Fluktuationen erliegen. In der Darstellung der Ladungsdichte aus Abbildung 4.3 lässt sich erkennen, dass die Welle nach zehn Zeitskalen im Begriff ist zu kollabieren; auch die vorher beschriebene Abnahme der Störampplitude der Ladungsdichte lässt sich in diesem Zusammenhang erkennen. Der Zusammenbruch der Welle wird daher höchstwahrscheinlich mit der Landau-Dämpfung in Relation stehen. Welcher physikalische Zusammenhang aber für die Zunahme der Gesamtenergie verantwortlich ist, soll in diesem Kontext nicht weiter untersucht werden. Vermutlich hängt es mit der Annahme zusammen, dass sich die Elektronen iso-

therm verhalten, da dies einen Energieaustausch mit einem äußeren System impliziert, aus dem die dem Plasma zugeführte Energie stammen könnte.

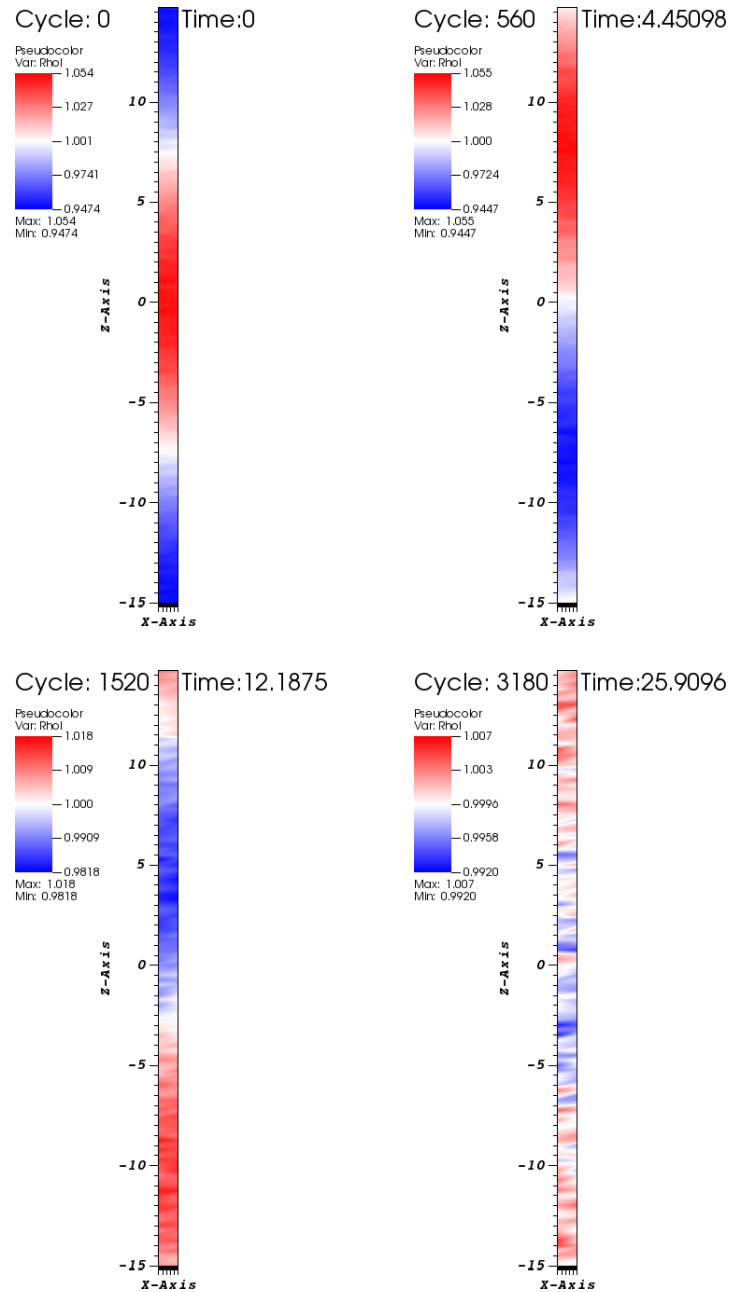
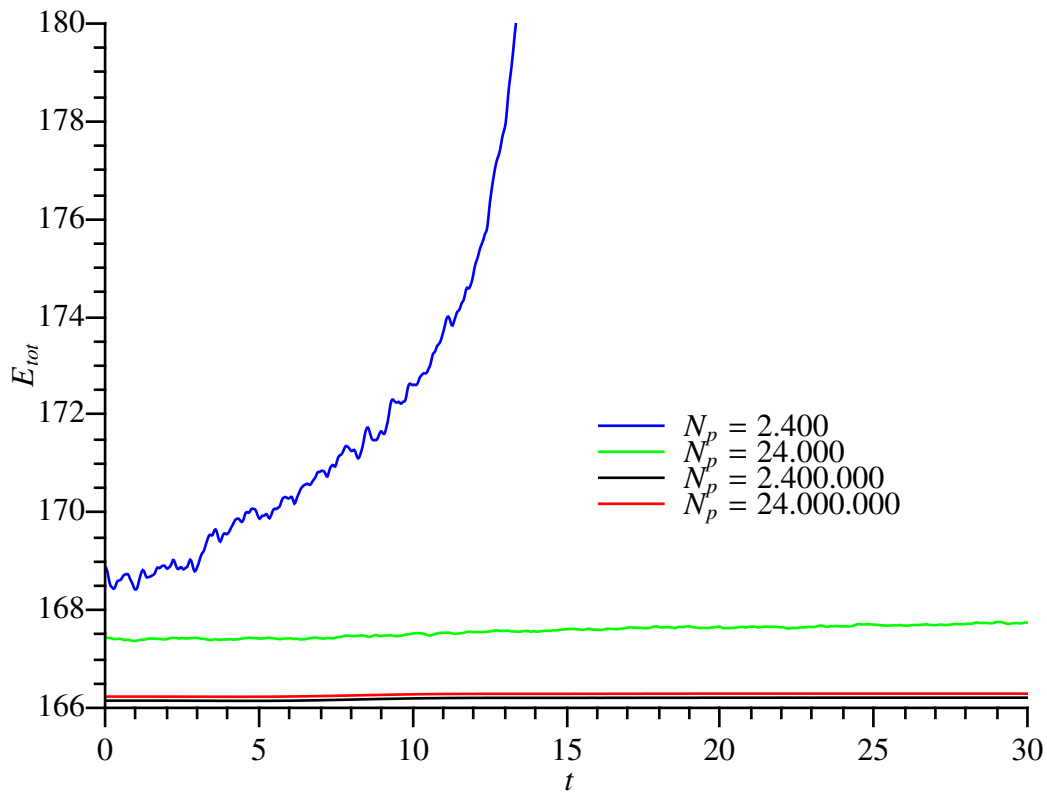
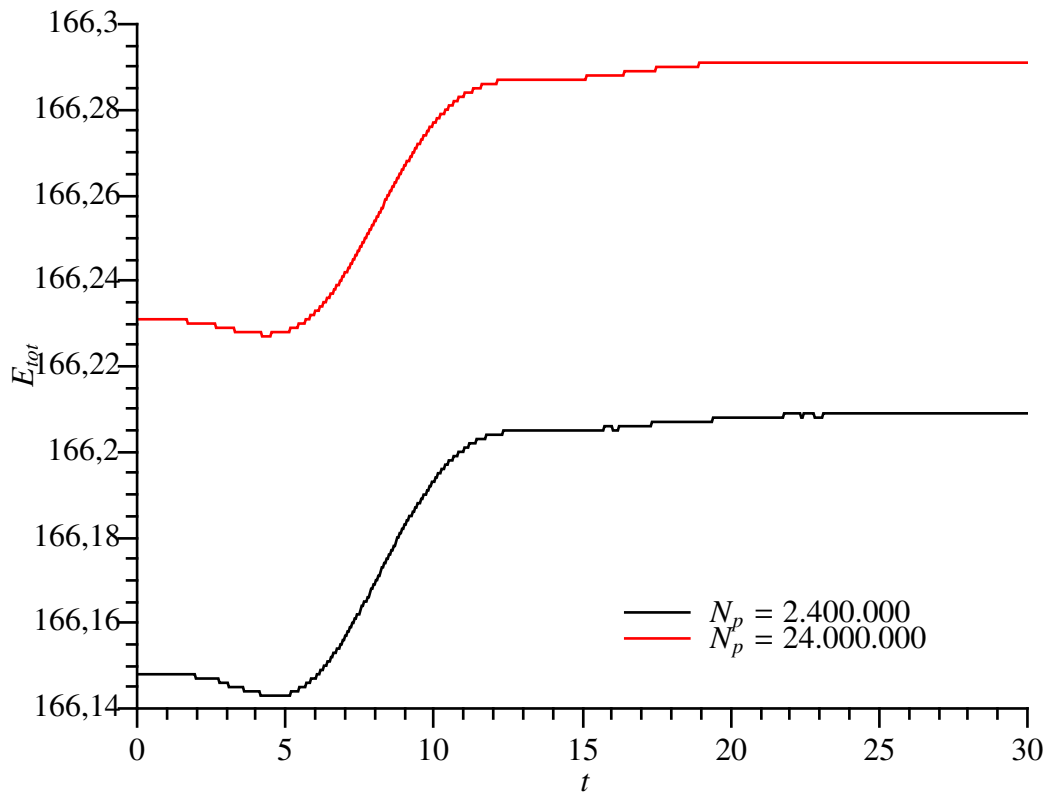


Abbildung 4.3: Zeitlicher Verlauf der Ladungsdichte einer ionenakustischen Welle mit $N = 24.000.000$; $n = 1$; $T_e = T_i = 0,8$ und den restlichen Parametern wie in Tabelle 4.2



(a) Zeitlicher Verlauf der Energie aller vier Fälle



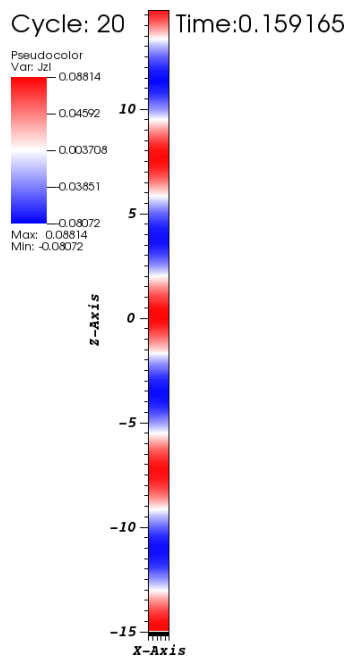
(b) Zeitlicher Verlauf der Energie für die beiden Fälle mit den meisten Teilchen

Abbildung 4.4: Graphische Darstellung der Ergebnisse des Energieerhaltungstests

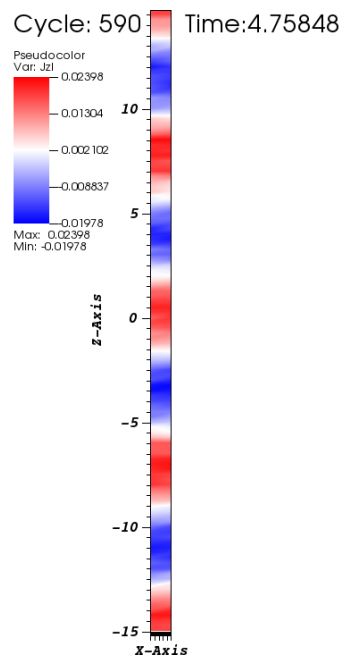
4.4 Parallelisierung

Obwohl die Parallelisierung schon lange Bestandteil des „Placebo“-Codes ist, soll abschließend noch stichprobenhaft für den Hybrid-Code überprüft werden, inwiefern die Wahl der Anzahl der Blöcke auf dem Simulationsgitter das Ergebnis beeinflusst. Analog zur Argumentation im vorigen Kapitel wird auch hier wieder eine Konfiguration aus einem Test der ionenakustischen Wellen mit warmen Ionen gewählt. Für diesen Fall sollen die Bilder zweier Testläufe verglichen werden, welche sich in der Konfiguration nur in der Anzahl der Blöcke, denen jeweils ein CPU-Prozess zugeordnet wird, unterscheiden.

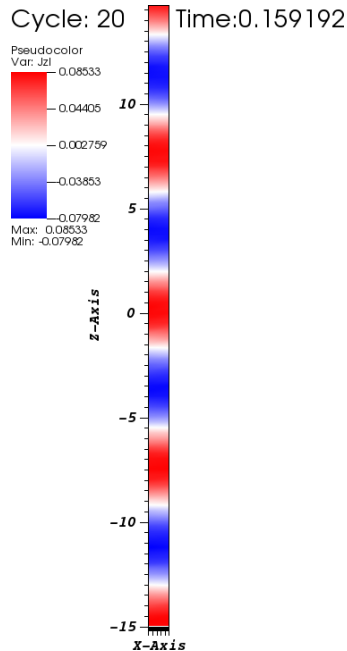
In Abbildung 4.5 sind für diese Testläufe jeweils ein Bild zu einem beliebigen, aber in beiden Läufen gleichen Zeitpunkt, sowie ein weiteres nach einer vergangenen Periode angegeben. Im Vergleich lassen sich kleinere Abweichungen in der Stromdichte und letztlich auch in den einzelnen Zeitschritten erkennen, die aus der bereits im vorigen Kapitel erwähnten Abhängigkeit von der Teilcheninitialisierung folgen. Die Übereinstimmung der Bilder ist jedoch groß, sodass die Funktionalität der Parallelisierung in diesem Test als bestätigt angesehen werden kann.



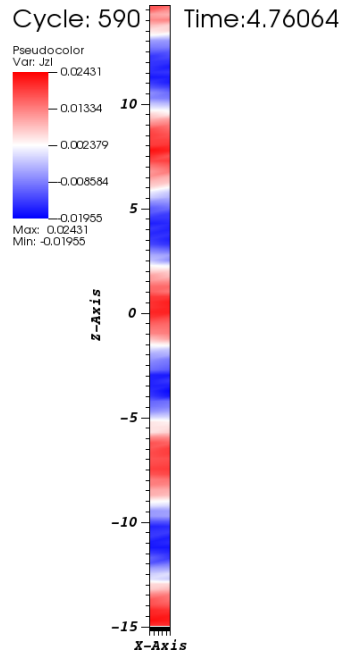
(a) Referenzzeitpunkt, simuliert auf 1 Block



(b) Zeitpunkt nach einer Periode, simuliert auf 1 Block



(c) Zeitpunkt wie in (a), simuliert auf 8 Blöcken



(d) Zeitpunkt wie in (b), simuliert auf 8 Blöcken

Abbildung 4.5: Vergleich verschiedener Bilder der Stromdichte in z-Richtung aus dem Test für ionenakustische Wellen für $n = 4$; $T_e = T_i = 0,8$ und den restlichen Parametern wie in Tabelle 4.2 zu den angegebenen Zeitpunkten und Anzahlen von Blöcken

5 Kommentar und Ausblick

Da die Tests im vorigen Kapitel unter den getätigten Annahmen zufriedenstellende Ergebnisse lieferten und bisher nur in kollisionsfreien Plasmen stattgefunden haben, können nun weitere Tests zur Untersuchung des Einflusses der Resistivität gestartet und deren Ergebnisse mit den bisherigen verglichen werden. Eine Verbesserung des Algorithmus zur Lösung der Hybrid-Gleichungen ist nach den bisherigen Tests nach persönlicher Einschätzung nicht notwendig, auch deshalb, weil sich der in abgewandelter Form verwendete CAM-CL-Algorithmus von Matthews^[8] in vielen anderen Arbeiten bewährt hat.

In naher Zukunft soll eine Anordnung eines Bennet-Pinches mit dem Hybrid-Code dieser Arbeit simuliert und mit den Ergebnissen aus dem Paper von Sotnikov^[6] verglichen werden. Außerdem soll überprüft werden, ob mithilfe des Hybrid-Codes der „kinetic plasma jet“ aus der Publikation von Tripathi/Bellan/Yun^[10] reproduziert werden kann.

In Bezug auf das FlareLab-Experiment kann zur Simulation einer vollständigen Durchführung eine Staffelung der drei Bestandteile des „Placebo“-Codes erwägt werden, bei dem sinnvolle, noch auszuarbeitende Kriterien den Übergang von einer Phase in die nächste, wie bereits in der Einleitung angedeutet, insofern geschehen machen, als das Ergebnis vom letzten Schritt der aktuellen Phase als Ausgangslage für die folgende verwendet wird.

Danksagung

Zum Ende dieser Arbeit möchte ich mich beim Institut für „Theoretische Physik I - Computerorientierte Plasmaphysik“ für die freundliche Aufnahme und die Zurverfügungstellung von Räumlichkeiten und Rechnerkapazitäten zur Realisierung dieser Arbeit danken. Des Weiteren danke ich Martin Stadt und Thomas Tacke für die Unterstützung, Tipps und hilfreichen Antworten auf meine Fragen und ganz besonders Herrn Dr. Jürgen Dreher für die vielen Stunden Zeit, die er in die Betreuung dieser Arbeit und somit zur Realisierung dieses Projekts geopfert hat.

Literatur

- [1] C.K. Birdsall and A.B. Langdon. *Plasma physics via computer simulation*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- [2] J.P. Boris. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code. *Proceeding of Fourth Conference on Numerical Simulations of Plasmas*, 1970.
- [3] T.J.M. Boyd and J.J. Sanderson. *The physics of plasmas*. Cambridge university press, 2003.
- [4] Francis F. Chen. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, volume 1: plasma physics. Plenum press (New York), second edition, 1984.
- [5] Richard Courant, Kurt Friedrichs, and Hans Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 1928.
- [6] V.I. Sotnikov et al. Development of global magnetohydrodynamic instabilities in z-pinch plasmas in the presence of nonideal effects. *Physics of Plasmas*, II(5), 2004.
- [7] Douglas S. Harned. Quasineutral hybrid simulation of macroscopic plasma phenomena. *Journal of computational physics*, 1982.
- [8] Alan P. Matthews. Current advance method and cyclic leapfrog for 2d multispecies hybrid plasma simulations. *Journal of computational physics*, 1993.
- [9] Chi-Wang Shu and Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of computational physics*, 1988.
- [10] S. K. P. Tripathi, P. M. Bellan, and G. S. Yun. Observation of kinetic plasma jets in a coronal-loop simulation experiment. *Physical Review Letters*, 2007.
- [11] Kang Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1966.